Fach Mathematik
Klassen alle 5. Klassen

Dauer der Prüfung: 4 Std.
Erlaubte Hilfsmittel: Fundamentum Mathematik und Physik
Taschenrechner TI-83 Plus inkl. Applikation CtlgHelp

Vorbemerkungen:

1. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht bewertet.
2. Jede Aufgabe muss auf ein separates Blatt gelöst werden. Teilaufgaben sind deutlich zu nummerieren.
3. Es können maximal 60 Punkte erreicht werden. Für die Note 6 genügen 54 Punkte.

Viel Erfolg wünschen Thomas Baier, Barbara Fankhauser, Helmut Locher, Frank Lutz, Philippe Meili und Halina Michalski!

Aufgabe 1 Raumgeometrie (2 + 1 + 3 + 2 + 2 + 3 = 13 Punkte)

Gegeben sind die Punkte A(7/2/12) und B(2/11/6).

a) Die Gerade g geht durch die Punkte A und B. Berechnen Sie die Koordinaten der sichtbaren Spurpunkte von g.
(Ein Punkt heisst sichtbar, wenn er im I. Oktanden liegt, d.h. seine drei Koordinaten alle grösser oder gleich Null sind.)

b) Die Punkte A und B bilden mit dem Ursprung O(0/0/0) ein Dreieck AOB. Dieses Dreieck wird mit einem vierten Punkt C zu einem Parallelogramm AOBC erweitert, und zwar so, dass die Strecke $\overline{AB}$ eine Diagonale des Parallelogramms ist. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C.

c) Zeigen Sie, dass dieses Parallelogramm AOBC kein Rhombus und auch kein Rechteck ist.

d) Zurück zum Dreieck AOB: Sein Innenwinkel im Punkt B heisst β. Wie gross ist dieser?

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreieckes AOB.

f) Nun soll der Punkt B so auf der Geraden g verschoben werden, dass β ein rechter Winkel wird. Wie lauten die Koordinaten dieses neuen Punktes $\tilde{B}$?

Aufgabe 2 Differentialrechnung (2 + 1 + 2 + 2 + 1.5 + 1.5 = 10 Punkte)

Die Funktion

$$h(x) = -0.1x^3 + 0.06x^2 - 0.002x + 2$$

modelliert den Höhenverlauf einer Skipiste. Sie beginnt bei x = –2 und endet bei x = 2.

a) Machen Sie eine Skizze des Graphen von h, in der mindestens fünf Punkte so genau wie möglich eingezeichnet sind.

b) Wie gross ist die durchschnittliche Steigung der Skipiste?

c) Berechnen Sie $h'(x)$ und $h''(x)$.

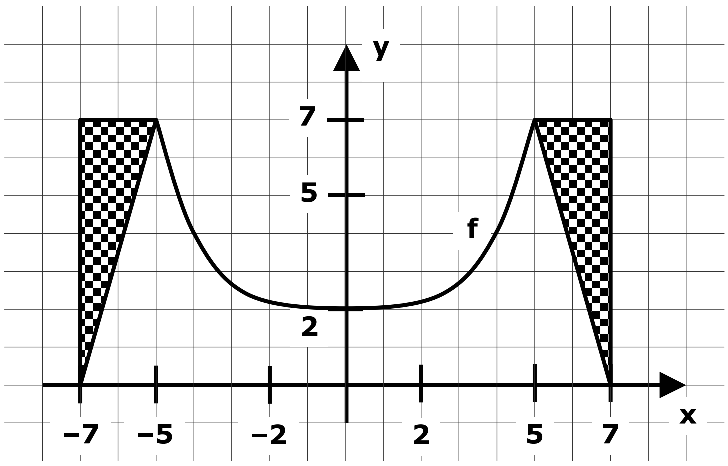
d) Welche Steigung hat die Piste am Start und wie gross ist an diesem Punkt ihr Winkel φ gegenüber der Horizontalen?

e) An welchen Stellen hat die Piste eine Steigung von –9%?

f) An welcher Stelle hat die Piste ihre grösste Steigung, wie gross ist sie und was bedeutet diese Stelle für den Skifahrer?

Aufgabe 3 Integralrechnung (2 + 3 = 5 Punkte)

Die Skizze zeigt den Querschnitt einer Halfpipe. Sie ist 14 m breit, 7 m hoch und 100 m lang.



Die Gleitfläche ist gegeben durch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{125}x^4 + 2.$$

Die karierte Fläche ist aus Holz, der Rest aus Schnee. (Für Nicht-Snowboarder mathematisch exakt: die Skizze zeigt den Querschnitt eines Quaders, aus dem der Funktionsbogen f ausgeschnitten ist.)

a) Wie viele Kubikmeter Schnee werden für die Halfpipe benötigt?

b) So viel Schnee ist aber nicht vorhanden: Es stehen nur $3'400\ m^3$ Schnee zur Verfügung. Wie hoch wird die Halfpipe in diesem Fall?
(Dabei ist zu beachten, dass die Gleitfläche immer noch durch die Funktion f(x) gegeben ist, die Länge immer noch 100 m, die Breite immer noch 14 m beträgt und der Holzbau im Querschnitt immer noch ein rechtwinkliges Dreieck ist, dessen eine Ecke auf der Gleitfläche f liegt.)

Aufgabe 4 Wahrscheinlichkeitsrechnung (1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 3 + 3 = 13 Punkte)

Situation I:
Kain und Abel werfen mit Steinen auf den Stamm einer Buche. Die Wahrscheinlichkeit, dass Kain trifft, beträgt 80 %, die Wahrscheinlichkeit, dass Abel trifft, liegt bei 70 %.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Abel in zwei Würfen genau einmal trifft?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kain in zwei Würfen mindestens einmal trifft?

Situation II:
Nun werfen beide abwechselnd, jeder hat zwei Würfe. Abel beginnt. Sieger ist, wer den Stamm als Erster trifft.

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Abel gewinnt?

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kain gewinnt?

Situation III:
Kain beginnt sich zu langweilen. Er schlägt vor, zusätzlich auf den Stamm einer etwas weiter entfernten Eiche zu werfen. Auf welchen Baum man werfen muss, wird vor jedem Wurf per Münzwurf ermittelt, d.h. Kain und Abel bestimmen je vor jedem einzelnen Wurf zuerst per Münzwurf den Zielbaum und werfen danach mit einem Stein auf diesen. Wenn Kain auf die Eiche zielt, trifft er mit einer Wahrscheinlichkeit von 55 %; bei Abel liegt diese bei 60 %. Die Trefferwahrscheinlichkeiten für die Buche bleiben unverändert. Für einen Treffer der Buche gibt es einen Punkt, trifft man die Eiche, so erhält man zwei Punkte.

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kain mit zwei Würfen genau drei Punkte holt?

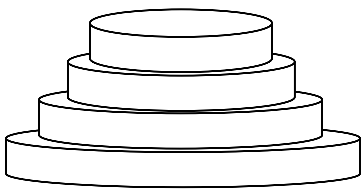
f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Abel mit zwei Würfen genau zwei Punkte holt?

g) Jeder wirft einmal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Abel mehr Punkte holt als Kain?

Aufgabe 5 Folgen und Reihen (3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11 Punkte)

Ein Architekt und eine Mathematikerin heiraten. Über das Aussehen der Hochzeitstorte haben sie unterschiedliche Vorstellungen.

Der Architekt schlägt eine vierstöckige Torte vor (jedes Stockwerk hat die geometrische Form eines geraden Kreiszylinders). Das erste (unterste) Stockwerk hat einen Radius von 25 cm und eine Höhe von 10 cm. Jedes weitere Stockwerk ist ebenfalls 10 cm hoch, hat jedoch einen jeweils 20 % kleineren Radius als das Stockwerk darunter.



a) Berechnen Sie den Radius r_4 des vierten Stockwerks, das Volumen V_4 des vierten Stockwerks und das Volumen T_4 der gesamten vierstöckigen Torte.

b) Geben Sie eine explizite Formel an, wie Sie den Radius r_n und das Volumen V_n des n-ten Stockwerks einer Torte berechnen können.

Die Mathematikerin hingegen möchte, dass sich nicht nur der Radius, sondern auch die Höhe von Stockwerk zu Stockwerk um 20 % verringert. Das erste Stockwerk hat die gleichen Abmessungen wie bisher.

c) Welche Gesamthöhe H kann eine solche „Mathematikerinnen-Torte" aus beliebig vielen Stockwerken höchstens haben?

d) Der Konditor kann nur Stockwerke herstellen, welche mindestens 3 mm dick sind. Aus wie vielen Stockwerken kann die „Mathematikerinnen-Torte" unter dieser Bedingung höchstens bestehen?

Schliesslich stellt der Konditor eine fünfstöckige Torte her. Sie ist 41 cm hoch. Das erste Stockwerk besitzt die gewünschten Abmessungen. Danach verringert sich die Höhe von Stockwerk zu Stockwerk immer um gleich viel Prozent.

e) Um wie viel Prozent verringert sich nun die Höhe von Stockwerk zu Stockwerk?

Aufgabe 6 Raumgeometrie (2 + 3 + 1 + 2 = 8 Punkte)

Hinweis: Diese Aufgabe lässt sich mit elementarsten rechnerischen Mitteln lösen. Dafür erfordert sie grosse sprachliche Präzision bei den Begründungen.

Gegeben ist eine quadratische, gerade Pyramide ABCDS mit der Grundkantenlänge a und der Höhe h (siehe Beiblatt). In halber Höhe schneidet man die Pyramide parallel zur Grundfläche durch und steckt den abgeschnittenen Oberteil umgekehrt (und gerade) in den Pyramidenstumpf, bis die Spitze S die Grundfläche ABCD erreicht. Die Deckfläche des Stumpfs wird mit A'B'C'D' bezeichnet.

a) Zeichnen Sie den Sachverhalt sorgfältig in die Figur auf dem Beiblatt ein.

b) Die Grundfläche ABCD wird durch die Verbindung von je zwei gegenüberliegenden Seitenmittelpunkten in vier kongruente Quadrate eingeteilt. Das Quadrat mit der Ecke A heisst A-Quadrat, das Quadrat mit der Ecke B heisst B-Quadrat, etc. Das A-Quadrat bildet mit dem Punkt A' die A-Pyramide. Zeichnen Sie diese in der Figur auf dem Beiblatt ein. Zeichnen Sie dann analog die B-, die C- und die D-Pyramide. Begründen Sie präzis, dass die fünf nun vorhandenen Pyramiden alle das gleiche Volumen besitzen.

c) Zusammen mit den fünf Pyramiden aus b) füllen noch vier unter sich identische Restkörper den Pyramidenstumpf vollständig aus. Färben Sie denjenigen Restkörper, der die Kante A'B' besitzt.

d) Wie gross ist das Volumen des gefärbten Körpers, ausgedrückt als Bruchteil des Volumens V der ursprünglichen Pyramide ABCDS?

Beiblatt zur Aufgabe 6