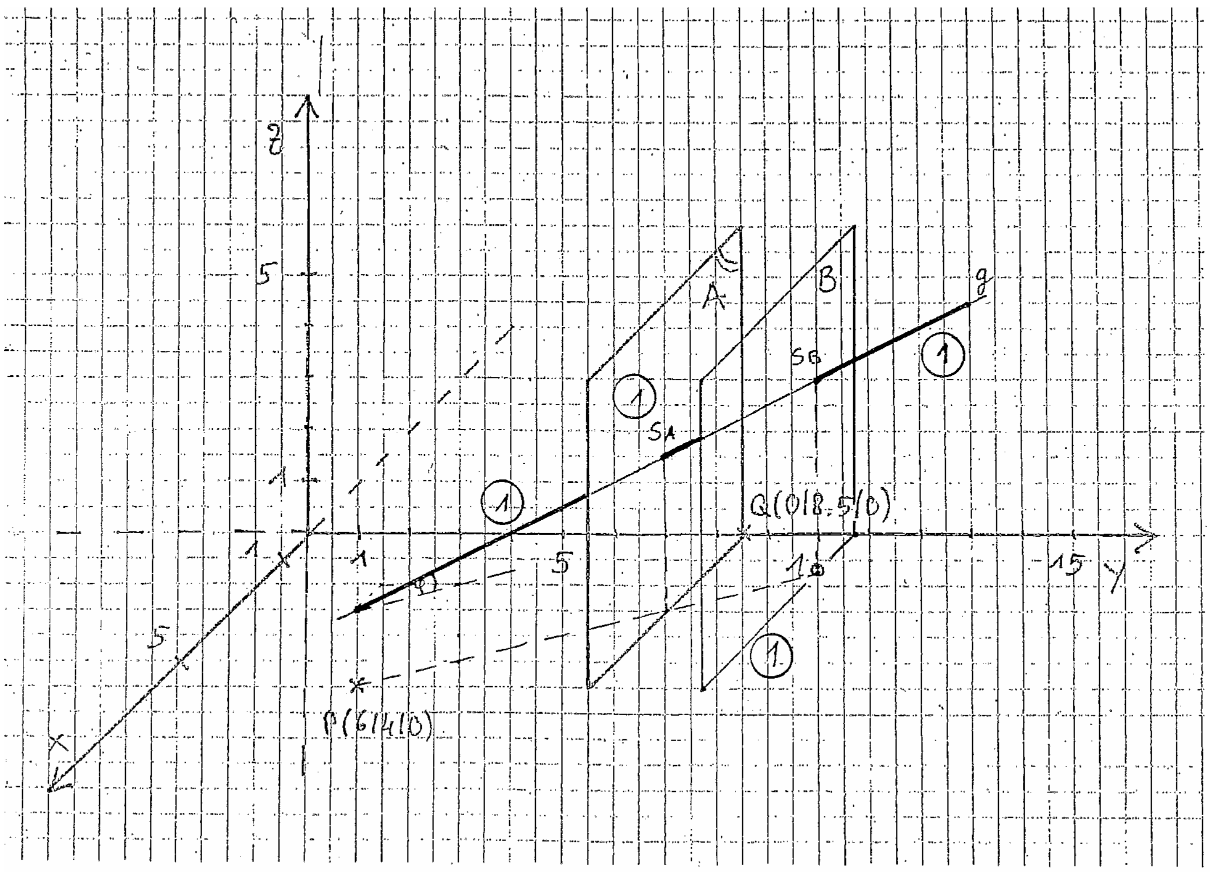
Aufgabe 1 Raumgeometrie			13 P.
a)	Flugbahngerade g auf Beiblatt	*(1 P.)*	2 P.
	$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 1.5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ *(z.B.)*	*(1 P.)*	
b)	Konstruktion von S_A auf Beiblatt	*(1 P.)*	2.5 P.
	abgelesene Koordinaten: S_A (3/8.5/3)	*(0.5 P.)*	
	Bestätigung durch Rechung: $\underline{\underline{y = 8.5}}$ $\Rightarrow$ 8.5 = 4 + 1.5s $\Rightarrow$ s = 3		
	$\Rightarrow$ $\underline{\underline{x =}}$ 6 – 1·3 $\underline{\underline{= 3}}$	*(0.5 P.)*	
	$\Rightarrow$ $\underline{\underline{z =}}$ 1.5 + 0.5·3 $\underline{\underline{= 3}}$	*(0.5 P.)*	
c)	S_B(1.5/y/z) $\Rightarrow$ 1.5 = 6 – s $\Rightarrow$ s = 4.5		2.5 P.
	$\Rightarrow$ y = 4 + 1.5·4.5 = 10.75	*(0.5 P.)*	
	$\Rightarrow$ z = 1.5 + 0.5·4.5 = 3.75	*(0.5 P.)*	
	$\Rightarrow$ $\underline{\underline{S_B(1.5/10.75/3.75)}}$		
	Entfernung von A: 10.75 – 8.5 = 2.25	*(0.5 P.)*	
	Wand B mit Punkt S_B auf Beiblatt einzeichnen	*(1 P.)*	
d)	Sichtbarkeit von g auf Beiblatt einzeichnen		1 P.
e)	$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}$	*(1 P.)*	2 P.
	$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert} = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2+1.5^2+0.5^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+1.5^2+0^2}}$	*(0.5 P.)*	
	$= \frac{1+2.25+0}{\sqrt{3.5}\cdot\sqrt{3.25}} = \frac{3.25}{\sqrt{11.375}} = 0.963624\ldots$		
	$\Rightarrow \varphi = 15.501359\ldots° \approx \underline{\underline{15.50°}}$	*(0.5 P.)*	
	Variante: Mit Trigonometrie am (rechtwinkligen) Steigungsdreieck. $\lvert\vec{a}\rvert$ ist dort Hypotenuse, $\lvert\vec{b}\rvert$ die waagrechte Kathete, 0.5 die senkrechte Kathete. Also z.B. $\tan\varphi = \frac{0.5}{\lvert\vec{b}\rvert} = \frac{0.5}{\sqrt{3.25}}$		

f)	D auf y-Achse $\Rightarrow$ D(0/y/0) *(0.5 P.)* $\overrightarrow{DS_A} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 8.5-y \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8.5-y \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DS_B} = \begin{pmatrix} 1.5-0 \\ 10.75-y \\ 3.75-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 10.75-y \\ 3.75 \end{pmatrix}$ *(1 P.)* $\left\|\overrightarrow{DS_A}\right\| = \left\|\overrightarrow{DS_B}\right\|$ *(0.5 P.)* $3^2 + (8.5-y)^2 + 3^2 = 1.5^2 + (10.75-y)^2 + 3.75^2$ Lösen von Hand, graphisch mit *intersect* oder mit *solver*: y = 9.25 *(0.5 P.)* <u>D(0/9.25/0)</u> *(0.5 P.)*	3 P.

Beiblatt zur Aufgabe 1:



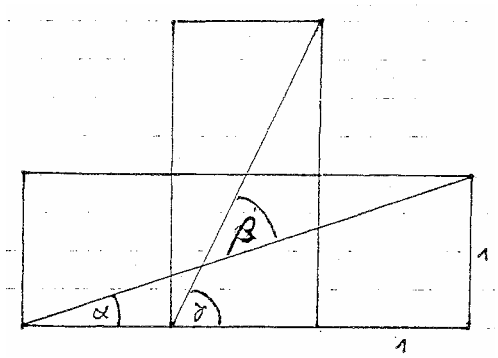
Aufgabe 2 Analysis		15.5 P.
a)	$f'(x) = -\frac{1}{24}\cdot 3\cdot x^2 + 0.5\cdot 2\cdot x + 0 = -\frac{1}{8}x^2 + x = g(x)$	1 P.
b)	B(10/y) $\Rightarrow$ mit Einsetzen in f oder *value*: y = $14\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{B(10/14\frac{1}{3})}}$ *(0.5 P.)* mit Einsetzen in f' oder dx/dy: $f'(10) = -2.5$ *(0.5 P.)* $\tan\tilde{\beta} = 2.5 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\beta} = 68.198590\ldots°$ *(0.5 P.)* $\beta = \tilde{\beta} + 90° \approx \underline{\underline{158.20°}}$ *(0.5 P.)*	2 P.
c)	h = y-Koordinate des Hochpunktes von f(x) mit *maximum* oder [$f' = 0$ und Einsetzen in f]: $\underline{\underline{h = 16\frac{2}{3}\text{cm}}}$	1.5 P.
d)	mit Einsetzen, *value* oder *table*: T(0/6) von c): Hochpunkt $(8/16\frac{2}{3})$ $m_S = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{16\frac{2}{3} - 6}{8 - 0} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$	1 P.
e)	Idee: Maximum von $f'(x) = g(x)$ suchen! *(0.5 P.)* mit *maximum*: x = 4, maximale Steigung $\underline{\underline{f'(4) = 2}}$ *(1 P.)* Einsetzen in f: $\underline{\underline{Q(4/11\frac{1}{3})}}$ *(1 P.)* Variante: maximale Steigung $\Rightarrow$ Wendepunkt von f suchen mit $f''(x) = 0$ für Wendepunkt x in f(x) einsetzen für maximale Steigung x in $f'(x)$ einsetzen oder mit *dy/dx*	2.5 P.
f)	Dicke der Leiste: d(x) = f(x) – g(x) = $-\frac{1}{24}x^3 + \frac{5}{8}x^2 - x + 6$ *(0.5 P.)* kleinste Dicke im Intervall [0,10] mit *minimum*: d_{min} = 5.5756 cm *(1.5 P.)* d_{min} > 5 cm $\Rightarrow$ Forderung ist erfüllt! *(0.5 P.)*	2.5 P.
g)	P(x/f(x)), Strecke $\overline{PN} = \ell$ mit Pythagoras: $\ell(x) = \sqrt{(x-8)^2 + (f(x) - 0)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (f(x))^2}$ *(1 P.)* mit *minimum*: x = 1.20, y = 9.51 *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ minimale Entfernung: $\underline{\underline{9.51\text{ cm}}}$ *(0.5 P.)* x mit *value* in f(x) einsetzen: $\underline{\underline{P(1.20/6.65)}}$ *(0.5 P.)* Variante: Ansatz für Länge mit Vektor $\overrightarrow{PN}$	2.5 P.
h)	Querschnittsfläche: $Q = \int_0^8 (f(x) - g(x))dx + \int_8^{10} f(x)dx \overset{\text{oder}}{=} \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 g(x)dx$ *(0.5 P.)* mit $\int$*f(x)dx* oder *fnint*: Q = 80 + $31.8\overline{3}$ = 122.5 – $10.\overline{6}$ = $111.8\overline{3}\text{ cm}^2$ *(0.5 P.)* V = Q · 250 cm = $\underline{\underline{27958.\overline{3}\text{ cm}^3}}$ = 27.96 dm^3 = 0.028 m^3 *(0.5 P.)* m = ρ · V = 16.215833… kg ≈ $\underline{\underline{16.22\text{ kg}}}$ *(1 P.)*	2.5 P.

Aufgabe 3 Integralrechnung		11 P.
a)	Schnittpunkte berechnen mit *intersect*: $S_1(1.5/16)$, $S_2(6/1)$ *(1 P.)* $A=\int_{1.5}^{6}\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_{1.5}^{6}\left(-\frac{20}{9}x^2+\frac{40}{3}x+1-\frac{36}{x^2}\right)dx$ *(1 P.)* $=\left[-\frac{20}{27}x^3+\frac{40}{6}x^2+x+36x^{-1}\right]_{1.5}^{6}$ (weil $\frac{36}{x^2}=36x^{-2}$) *(2 P.)* $=92-38$ (Grenzen einsetzen!) $=\underline{\underline{54}}$ *(1 P.)* <u>Variante:</u> $A=\int_{1.5}^{6}f(x)dx-\int_{1.5}^{6}g(x)dx=\ldots=72-18=54$	5 P.
b)	ev. Skizze mit Prinzip Ober- und Untersumme *(1 P.)* Obersumme: $O=\frac{1}{250}\cdot\frac{1}{1}+\frac{1}{250}\cdot\frac{1}{1.004}+\frac{1}{250}\cdot\frac{1}{1.008}+\cdots+\frac{1}{250}\cdot\frac{1}{1.996}$ (mit $\frac{1}{250}=0.004$) *(1 P.)* TR: seq (1/250*1/X , X , 1 , 1.996, 0.004) TR: sum(Ans) $\underline{\underline{O = 0.6941481806}}$ *(1 P.)* Untersumme: $U=\frac{1}{250}\cdot\frac{1}{1.004}+\frac{1}{250}\cdot\frac{1}{1.008}+\frac{1}{250}\cdot\frac{1}{1.012}+\cdots+\frac{1}{250}\cdot\frac{1}{2}$ *(0.5 P.)* TR: seq (1/250*1/X , X , 1.004 , 2, 0.004) TR: sum(Ans) $\underline{\underline{U = 0.6921481806}}$ *(0.5 P.)* O – U = 0.002 entspricht erster Summand der Obersumme minus letzter Summand der Untersumme, also $\frac{1}{250}\cdot\frac{1}{1}-\frac{1}{250}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{500}=0.002$. *(1 P.)* Beim Mittelwert der Obersumme und Untersumme werden die Rechtecke mit einer Geraden (Diagonalen des Differenzrechtecks) zu Trapezen. Die Kurve ist aber nach unten gekrümmt und deshalb innerhalb jedes Rechteckes leicht tiefer als diese Diagonalen. Somit liegt das exakte Resultat näher bei der Untersumme. (Ev. mit geeigneter Skizze ergänzen.) *(1 P.)*	6 P.

Aufgabe 4 Wahrscheinlichkeitsrechnung		13 P.
a)	P (mind. 1x8) = 1 – P(keine 8) = $1-\left(\frac{6}{8}\right)^3 = \underline{\underline{\frac{37}{64} = 57.81\%}}$	1 P.
b)	P (mind. 1x3) = 1 – P(nie 3) = $1-\left(\frac{7}{8}\right)^n$ *(0.5 P.)* Bedingung: $1-\left(\frac{7}{8}\right)^n = 0.999$ *(1 P.)* von Hand mit Logarithmen oder mit *table* oder graphisch mit *intersect* oder mit *solver*: n = 51.7 *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ n = <u>52 Würfe</u> *(0.5 P.)*	2.5 P.
c)	Summe / Einzelwürfe / Wahrscheinlichkeit / Summe 24 / 8/8/8 / $1\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^3$ 23 / 7/8/8 / $3\cdot\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8}\right)$ 22 / 7/7/8 / $3\cdot\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{8}\right)$ 22 / 6/8/8 / $3\cdot\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{2}{8}\right)$ P(mind. 22) = $\underline{\underline{\frac{19}{256} = 7.42\%}}$ *(0.5 P.)* *(1 P.)* *(0.5 P.)*	2 P.
d)	P(1x8) = P(korrekt–8–nicht 8) + P(korrekt–nicht 8–8) + P(gefälscht–8–nicht 8) + P(gefälscht–nicht 8–8) *(0.5 P.)* $= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{7}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{8} + \frac{1}{2}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{2}{8}$ *(1 P.)* $\underline{\underline{= \frac{19}{64} = 29.69\%}}$ *(0.5 P.)*	2 P.
e)	günstig: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{16}$ möglich: $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{8} = \frac{3}{16}$ $\Rightarrow$ $\frac{g}{m} = \underline{\underline{\frac{1}{3} = 33.33\%}}$	1 P.
f)	P(F gewinnt spät. im 3. Wurf) = P(F gewinnt im 1. Wurf) + P(F gewinnt im 2. Wurf) + P(Fritz gewinnt im 3. Wurf) $= \frac{7}{8}\cdot\frac{2}{8} + \frac{7}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{8} + \frac{7}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{8}$ *(1 P.)* = 0.4565 *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ P(F verliert Wette) = 1 – 0.4565 = 0.5435 = <u>54.35%</u> *(0.5 P.)* <u>Variante:</u> P(F verliert Wette) = P(Hans gewinnt spät. im 3. Wurf) + P(keiner gewinnt)	2 P.
g)	Betrachte unendliches Spiel $\Rightarrow$ unendliche geometrische Reihe mit q = $\frac{7}{8}\cdot\frac{6}{8} = \frac{6}{8}\cdot\frac{7}{8} = \frac{21}{32}$ *(0.5 P.)* Berechne in vier Fällen P(gewinnt): korrektes Oktaeder / gefälschtes Oktaeder fängt an: $P = \frac{\frac{1}{8}}{1-q} = \frac{4}{11}$ / $P = \frac{\frac{2}{8}}{1-q} = \frac{8}{11}$ fängt nicht an: $P = \frac{\frac{6}{8}\cdot\frac{1}{8}}{1-q} = \frac{3}{11}$ / $P = \frac{\frac{7}{8}\cdot\frac{2}{8}}{1-q} = \frac{7}{11}$ *(1.5 P.)* $\Rightarrow$ Der Vorteil „mit dem gefälschten Oktaeder spielen" bringt mehr! *(0.5 P.)*	2.5 P.

Aufgabe 5 Trigonometrie — 3 P.

5) (3 P.)



$\tan\alpha = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18.43°$ *(1 P.)*

$\tan\gamma = \frac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad \gamma = 63.43°$ *(1 P.)*

$\beta = \gamma - \alpha = \underline{\underline{45°}}$ *(1 P.)*

Aufgabe 6 Folgen und Reihen — 8 P.

a) (3 P.)

$d_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = \underline{\underline{16}}$ *(0.5 P.)*

$h_4 = 3 + 6 + 9 + 12 = \underline{\underline{30}}$ *(0.5 P.)*

d_n und h_n sind endliche, arithmetische Reihen mit $d = 2$, resp. $d = 3$!

$d_{100} = 1\cdot 100 + \frac{100\cdot 99}{2}\cdot 2 = \underline{\underline{10'000}}$ *(1 P.)*

$h_{100} = 3\cdot 100 + \frac{100\cdot 99}{2}\cdot 3 = \underline{\underline{15'150}}$ *(1 P.)*

<u>Varianten:</u>

$d_{100} = 1 + 3 + 5 + \ldots + 199 \qquad (199 = 1 + 99\cdot 2)$

$\quad = \frac{100}{2}\cdot(1+199) = 10'000$

$h_{100} = 3 + 6 + 9 + \ldots + 300 \qquad (300 = 3 + 99\cdot 3)$

$\quad = \frac{100}{2}\cdot(3+300) = 15'150$

b) (3 P.)

$d_n = 1\cdot n + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 2 = n + n(n-1) = n + n^2 - n = \underline{\underline{n^2}}$ *(1.5 P.)*

$h_n = 3\cdot n + \frac{n(n-1)}{2}\cdot 3 = 3n + 1.5n(n-1) = 3n + 1.5n^2 - 1.5n = \underline{\underline{1.5n^2 + 1.5n}}$ *(1.5 P.)*

c) (2 P.)

$\lim_{n\to\infty}\frac{h_n}{d_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1.5n^2 + 1.5n}{n^2}$ *(0.5 P.)*

$= \lim_{n\to\infty}\left(1.5 + \frac{1.5}{n}\right)$ *(0.5 P.)*

$= \lim_{n\to\infty}1.5 + \lim_{n\to\infty}\frac{1.5}{n}$

$= 1.5 + 0$ *(0.5 P.)*

$= \underline{\underline{1.5}}$ *(0.5 P.)*