Aufgabe 1 Raumgeometrie — 15 P.

a) (3 P.)

$$SA: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$ *(1 P.)*

linke Wand: $y = 0 \;\Rightarrow\; s = 2$ *(0.5 P.)*

$\Rightarrow\; x = 12 + 2\cdot(-3) = 6$ und $z = 0 + 2\cdot 3 = 6$

$\Rightarrow\; \underline{A(6/0/6)}$ *(0.5 P.)*

Konstruktion auf Beiblatt: SA, (SA)' *(0.5 P.)* , A *(0.5 P.)*

b) (2 P.)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ 8.\overline{6}-0 \\ 10-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8.\overline{6} \\ 4 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad AB: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8.\overline{6} \\ 4 \end{pmatrix}$$ *(1 P.)*

$R \in AB$?

$$\begin{pmatrix} 12 \\ -13 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8.\overline{6} \\ 4 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix} t = -1.5 \\ t = -1.5 \\ t = -1.5 \end{matrix} \quad\Rightarrow\; \underline{\underline{\text{Ja}}},\; R \in AB.$$ *(1 P.)*

<u>Variante:</u>

Richtungsvektor von AB aus Reflexion von $\overrightarrow{AS} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} -3 \\ 6.5 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) (3.5 P.)

Konstruktion auf Beiblatt: B, Flugbahn SAB *(1 P.)*

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB}}{\overline{AS}\cdot\overline{AB}} \text{ mit } \overrightarrow{AS} = -2\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ -6 \end{pmatrix}$$ *(0.5 P.)*

$$\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB} = 6\cdot(-4) + 13\cdot 8.\overline{6} + (-6)\cdot 4 = -24 + 112.\overline{6} - 24 = 64.\overline{6}$$ *(0.5 P.)*

$$\overline{AS} = \sqrt{6^2 + 13^2 + (-6)^2} = \sqrt{241} \approx 15.52$$

$$\overline{AS} = \sqrt{(-4)^2 + 8.\overline{6}^2 + 4^2} = \sqrt{107.\overline{1}} \approx 10.35$$ *(0.5 P.)*

$\Rightarrow\; \cos\alpha = 0.402489\ldots$ *(0.5 P.)*

$\Rightarrow\; \alpha = 66.266090\ldots° \approx \underline{\underline{66.27°}}$ *(0.5 P.)*

d) (3.5 P.)

F auf AB $\Rightarrow$ F($6 - 4t$ / $8.\overline{6}\,t$ / $6 + 4t$) *(0.5 P.)*

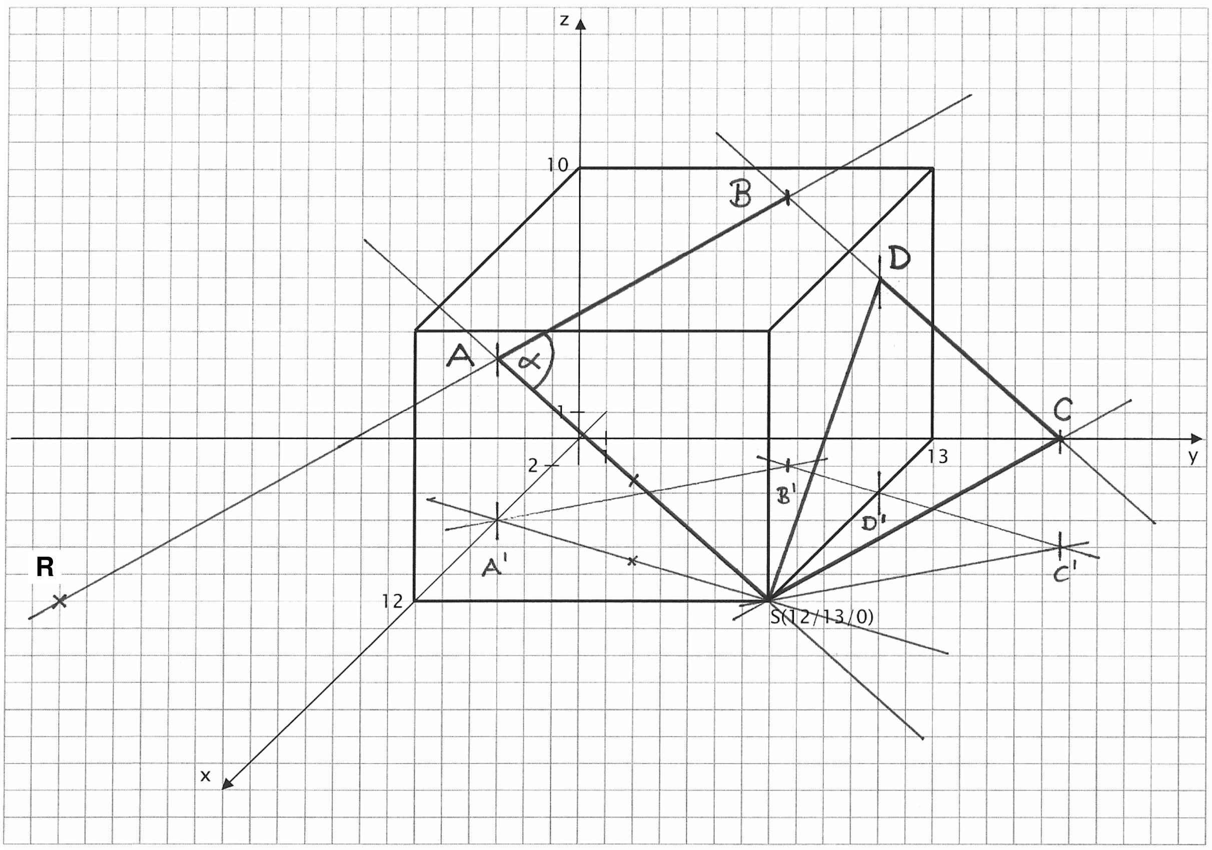
$$\overrightarrow{SF} = \begin{pmatrix} 6-4t-12 \\ 8.\overline{6}t-13 \\ 6+4t-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-4t \\ -13+8.\overline{6}t \\ 6+4t \end{pmatrix}$$ *(0.5 P.)*

$$\overline{SF} = \sqrt{(-6-4t)^2 + (-13+8.\overline{6}t)^2 + (6+4t)^2}$$ *(1 P.)*

mit *minumum*: $x = t = 0.603734\ldots$, $y = d = 14.211211\ldots \approx \underline{\underline{14.21}}$ *(1.5 P.)*

	<u>Variante mit Skalarprodukt:</u> $\overrightarrow{FS} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{FS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$; Ansatz $\overrightarrow{FS}$ wie oben *(0.5 P. + 0.5 P.)* $\Rightarrow -24 - 16t + 112.\overline{6} - 75.\overline{1}t - 24 - 16t = 0$ *(1 P.)* $\Rightarrow t = \frac{291}{482} = 0.603734\ldots$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ in $\overrightarrow{FS}$ einsetzen und $\overline{FS} = d$ berechnen. *(1 P.)* <u>Variante mit Trigonometrie:</u> $\sin\alpha = \frac{d}{\overline{AS}} \Rightarrow d = \overline{AS} \cdot \sin\alpha$ mit $\overline{AS}$ und α aus c).	
e)	$\vec{c} = \vec{s} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 8.\overline{6} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 21.\overline{6} \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{C(8/21.\overline{6}/4)}}$ <u>Variante:</u> $\vec{c} = \vec{b} + \overrightarrow{AS}$	1 P.
f)	Konstruktion auf Beiblatt: Parallelogramm SABC *(1 P.)* B'C', D, Dreieck SDC farbig *(1 P.)*	2 P.

Beiblatt zur Aufgabe 1:



Aufgabe 2 Funktionen und Differentialrechnung		12 P.
a)	Hochpunkt mit *maximum*: B(17.83/629.43) *(1 P.)* Nullstelle mit *zero*: x = 25.63. *(0.5 P.)*	1.5 P.
b)	$h'(x) = -0.08x^3 + 2.7x^2 - 30x + 130$ *(1 P.)* $h''(x) = -0.24x^2 + 5.4x - 30$ *(0.5 P.)*	1.5 P.
c)	Steigung in A mit *dy/dx* in h(x) oder $h'(0)$ berechnen: 130. *(0.5 P.)* In Realität: $130\,\frac{\text{m}}{\text{km}} = \frac{130\text{m}}{1000\text{m}} = 0.13 = 13\ \%$ *(0.5 P.)* $\tan\varphi = 0.13 \Rightarrow \varphi = 7.41°$ *(1 P.)*	2 P.
d)	aus Bild sofort klar: entweder bei x = 0 oder x = 22 Steigung bei x = 22 mit *dy/dx* in h(x) oder $h'(22)$: –75.04 $\Rightarrow$ Steilste Stelle ist im Punkt A. Variante: $h'(x)$ zeichnen und mit *maximum* und *minimum* begründen.	1 P.
e)	$h'(x)$ zeichnen mit *minimum* T(10/20), mit *maximum* H(12.5/20.625) $\Rightarrow$ Für $10 < x < 12.5$ nimmt die Steigung zu. Variante: Wendepunkte von h(x) bestimmen. Bedingung: $h''(x) = 0$	1 P.
f)	Kurve h in y-Richtung verschieben $\Rightarrow$ Es ändert nur die Konstante! Differenz: $1126.06 - y_B = 1126.06 - 629.43 = 496.63$ $\Rightarrow H(x) = -0.02x^4 + 0.9x^3 - 15x^2 + 130x + 496.63$	1 P.
g)	mit $Y_3 = 675$ und *intersect* von H(x) und Y_3 oder mit $Y_3 = 675 - 496.63$ und *intersect* von h(x) und Y_3 oder mit *solver* (beide Varianten) $x_C = 24.70$	1 P.
h)	ganze Wanderung: horizontal: 24.70 km à $\frac{1\text{h}}{5\text{km}}$ = 4.94 h *(0.5 P.)* bergauf: 629.43 m à $\frac{0.25\text{h}}{100\text{m}}$ = 1.57 h *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ Total: 6.51 h (≈ 6.5 h) *(0.5 P.)* halbe Dauer: Zeit t für Aufstieg: $t(x) = \frac{x}{5} + \frac{h(x)}{400}$ *(1 P.)* $t(x) = \frac{6.51}{2}$ mit *intersect* oder *solver*: x = 10.03 *(0.5 P.)* Variante für ganze Wanderung: $t(x_B) + (x_C - x_B)/5 = 5.14 + 6.87/5 = 6.51$ h.	3 P.

Aufgabe 3	Integralrechnung	12 P.
a)	Hochpunkt von k: mit maximum $\underline{\underline{H(0/\sqrt{8}) \approx H(0/2.83)}}$ *(0.5 P.)* $F = \frac{r^2\pi}{2}$ mit $r = \sqrt{8} \Rightarrow F = \underline{\underline{12.57}}$ *(1 P.)* <u>Variante:</u> $F = \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} k(x)dx$ mit $\int$*f(x)dx* oder *fnInt*	1.5 P.
b)	g einzeichnen *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ S(2/2) *(0.5 P.)*	1 P.
c)	$A = \int_0^2 (g(x) - p(x))dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \left(\frac{4}{2} - \frac{8}{6}\right) - 0 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$ <u>Variante:</u> $\int_0^2 g(x)dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{4}{2} - 0 = 2$ (oder mit Dreiecksformel: $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$) *(0.5 P.)* $\int_0^2 p(x)dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} - 0 = \frac{4}{3}$ *(1 P.)* $A = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ *(0.5 P.)*	2 P.
d)	$B = \int_{-2}^{2} (k(x) - p(x))dx = 7.616518\ldots \approx \underline{\underline{7.62}}$ <u>Varianten:</u> 1) $B = \int_{-2}^{2} k(x)\,dx - \int_{-2}^{2} p(x)\,dx = 10.28\ldots - 2.66\ldots \approx \underline{\underline{7.62}}$ 2) von 0 bis 2 integrieren und Resultate verdoppeln (Symmetrie), für Parabel Teilresultat von c) nutzen.	1.5 P.
e)	Idee: B = Viertelkreis (mit $r = \sqrt{8}$) + $2 \cdot A$ *(0.5 P.)* Viertelkreis = $\frac{r^2\pi}{4} = 6.283185\ldots$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow \underline{\underline{B = 7.62}}$ *(0.5 P.)* <u>Variante:</u> Idee: B = Kreissegment (mit $r = \sqrt{8}$) + Parabelfläche *(0.5 P.)* Kreissegment = $\frac{\sqrt{8}^2}{2} \cdot \left(\frac{\pi \cdot 90°}{180°} - \sin 90°\right) = 2.283185\ldots$ Parabelfläche = $2 \cdot 4 - \int_{-2}^{2} p(x)\,dx = 8 - \frac{8}{3} = 5.333\ldots$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow \underline{\underline{B = 7.62}}$ *(0.5 P.)*	1.5 P.

f)	$\int_{-2}^{2} p(x)dx = \frac{8}{3}$ Intervallbreite ist 4. $\Rightarrow \ \overline{m} = \frac{8/3}{4} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$ Gerade einzeichnen.	*(0.5 P.)* *(0.5 P.)* *(0.5 P.)* *(0.5 P.)*	2 P.
g)	$V_1 = \pi \cdot \int_{0}^{2} p(x)^2 dx = 5.026548\ldots$ $V_2 = \pi \cdot \int_{2}^{\sqrt{8}} k(x)^2 dx = 5.502849\ldots$ $V = V_1 + V_2 = 10.52939\ldots \approx \underline{\underline{10.53}}$	*(1 P.)* *(1 P.)* *(0.5 P.)*	2.5 P.

Aufgabe 4 Wahrscheinlichkeitsrechnung		15 P.
a)	$P(4x5) = 0.17^4 = \underline{\underline{8.3521 \cdot 10^{-4}}} = \underline{\underline{0.084\ \%}}$	1 P.
b)	$P(1x5) = 0.17 \cdot 0.83^3 \cdot 4 = 0.38881516 = \underline{\underline{38.88\ \%}}$ weil 4 verschiedene Möglichkeiten.	1.5 P.
c)	P(mind. 1x5) = 1 – P(nie 5) *(0.5 P.)* $P(\text{nie } 5) = 0.83^4 = 0.47458321$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ P(mind. 1x5) = 0.52541679 = $\underline{\underline{52.54\ \%}}$ *(0.5 P.)*	1.5 P.
d)	$P(5{*}5{*}) = 0.17 \cdot 0.83 \cdot 0.17 \cdot 0.83 = 0.01990921 = \underline{\underline{1.99\ \%}}$	1 P.
e)	$P(2x5) = P(5{*}5{*}) \cdot 6 = 0.11945526 = \underline{\underline{11.95\ \%}}$ weil $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ Möglichkeiten.	1 P.
f)	I) Augensumme 4 $\Rightarrow$ 1 + 1 + 1 + 1 $P(4x1) = 0.16^4 = 6.5536 \cdot 10^{-4} = 0.066\ \%$ *(0.5 P.)* II) Augensumme 5 $\Rightarrow$ 2 + 1 + 1 + 1 (4 Möglichkeiten!) $P(3x1 \text{ und } 1x2) = 0.16^3 \cdot 0.17 \cdot 4 = 0.00278428 = 0.28\ \%$ *(1 P.)* $\Rightarrow$ I) + II) = P(Augensumme max. 5) = 0.00344064 = $\underline{\underline{0.34\ \%}}$ *(0.5 P.)*	2 P.
g)	P (mind. 1x5) = 1 – P(nie 5) = $1 - 0.83^n$ *(0.5 P.)* Bedingung: $1 - 0.83^n = 0.99$ oder P(nie 5) = $0.83^n = 0.01$ *(0.5 P.)* von Hand mit Logarithmen oder mit *table* oder graphisch mit *intersect* oder mit *solver*: n = 24.715… *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ n = $\underline{\underline{25 \text{ Würfe}}}$ *(0.5 P.)*	2 P.
h)	mögliche Fläche: $m = A_{\text{Rhombus}} = \frac{e \cdot f}{2} = 6$ *(0.5 P.)* günstige Fläche: gleicher Abstand von A und D $\Rightarrow$ Mittelsenkrechte m *(0.5 P.)* $g = A_{\text{Trapez}} = A_{\text{Rechteck}} - A_{\text{Dreieck}}$ Rhombusseite: $s = \sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2} = \sqrt{1.5^2 + 2^2} = 2.5$ *(0.5 P.)* halber Rhombuswinkel: $\tan\alpha = \frac{1.5}{2} \Rightarrow \alpha = 36.87°$ *(0.5 P.)* grosser Dreieckswinkel: $\beta = 2\alpha = 73.74°$ (Wechselwinkel!) *(0.5 P.)* lange Kathete (ist m!): $\sin\beta = \frac{m}{s} \Rightarrow m = 2.5 \cdot \sin\beta = 2.4$ *(0.5 P.)* kurze Kathete: $x = \sqrt{s^2 - m^2} = \sqrt{2.5^2 - 2.4^2} = 0.7$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow g = A_{\text{Trapez}} = \frac{0.5s + (0.5s + x)}{2} \cdot m = \frac{1.25 + (1.25 + 0.7)}{2} \cdot 2.4 = 1.6 \cdot 2.4 = 3.84$ *(0.5 P.)* P(näher bei A als D) = $\frac{g}{m} = \frac{3.84}{6} = 0.64 = \underline{\underline{64\ \%}}$ *(1 P.)* <u>Variante:</u> $A_{\text{Trapez}} = A_{\text{Rechteck}} - A_{\text{Dreieck}}$ $A_{\text{Rechteck}} = m \cdot (0.5s + x) = 2.4 \cdot 1.95 = 4.68$ $A_{\text{Dreieck}} = 0.5 \cdot x \cdot m = 0.5 \cdot 0.7 \cdot 2.4 = 0.84$ $\Rightarrow 4.68 - 0.84 = 3.84$	5 P.

Aufgabe 5 Folgen und Reihen		9 P.
a)	geometrische Folge mit $a_1 = 6$ und $q = 0.9$! $a_2 = a_1 \cdot 0.9 = \underline{\underline{5.4}}$ $a_3 = a_2 \cdot 0.9 = \underline{\underline{4.86}}$ $a_4 = a_3 \cdot 0.9 = 4.374 \approx \underline{\underline{4.37}}$	1.5 P.
b)	$a_{15} = 6 \cdot 0.9^{14} = 1.372607\ldots \approx \underline{\underline{1.37}}$	0.5 P.
c)	$a_n = 6 \cdot 0.9^{(n-1)} = 10^{-6}$ *(1 P.)* von Hand mit Logarithmen oder mit *table* oder graphisch mit *intersect* oder mit *solver*: $n = 149.132\ldots$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ $\underline{n = 150}$ (Die 150. Teilstrecke ist als erste kürzer als 10^{-6}.) *(0.5 P.)*	2 P.
d)	s besitzt 12 Summanden, der erste ist 4.374, q ist weiterhin 0.9: *(0.5 P.)* $s = 4.374 \cdot \frac{1-0.9^{12}}{1-0.9} = 31.3865\ldots \approx \underline{\underline{31.39}}$ *(1 P.)* Variante: $s = s_{15} - s_3 = 47.646532\ldots - 16.26$	1.5 P.
e)	$\ell = \frac{a_1}{1-q} = \frac{6}{1-0.9} = \underline{\underline{60}}$	1 P.
f)	nach rechts: $R = a_1 + a_4 + a_7 + \ldots$; G.R. mit $q = 0.9^3 = 0.729$ $R = \frac{6}{1-0.9^3} = 22.140221\ldots$ *(1 P.)* nach links: $\cos 60° = \frac{x_2}{a_2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = 0.5 \cdot a_2$ und analog I) $L_1 = x_2 + x_5 + x_8 + \ldots = 0.5a_2 + 0.5a_5 + 0.5a_8 + \ldots$; G.R. mit $q = 0.9^3$ $L_1 = \frac{0.5 \cdot 5.4}{1-0.9^3} = 9.963099\ldots$ *(0.5 P.)* II) $L_2 = x_3 + x_6 + x_9 + \ldots = 0.5a_3 + 0.5a_6 + 0.5a_9 + \ldots$; G.R. mit $q = 0.9^3$ $L_2 = \frac{0.5 \cdot 4.86}{1-0.9^3} = 8.966789\ldots$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow x_Z = 2 + R - L_1 - L_2 = 5.210332 \approx \underline{\underline{5.21}}$ *(0.5 P.)* Variante: Gerade durch $P_0(2/1)$ und $P_3(2.87/1.4676\ldots)$: *(0.5 P.)* $y = 0.5375\ldots x - 0.07506\ldots$ *(0.5 P.)* Gerade durch $P_1(8/1)$ und $P_4(7.244/1.4676\ldots)$: *(0.5 P.)* $y = -0.6185\ldots x + 5.9487\ldots$ *(0.5 P.)* Schnittpunkt der beiden Geraden: $Z(5.210332\ldots/2.7256595\ldots)$ *(0.5 P.)*	2.5 P.