

- Vorbemerkungen:
1. Erlaubte Hilfsmittel: - Formelsammlung Mathematik, Aarau
- Taschenrechner TI 83 inkl. Handbuch
 2. Nicht abbrechende Dezimalzahlen sind auf 3 geltende Ziffern zu runden.
 3. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht bewertet.
 4. Bei Lösungsschritten, die mit einem Rechnerprogramm ausgeführt werden, müssen die im Programm verwendeten Formeln angegeben werden.

Aufgabe 1 Vektorgeometrie (8 Punkte)

Die beiden Würfel mit den Kantenlängen 5 cm und 3 cm (siehe Beiblatt) werden von der Geraden g durch die Punkte P(0/0/7) und Q(6/13/-1) durchstossen.

- a) Konstruieren Sie direkt auf dem Beiblatt die Durchstosspunkte der Geraden g durch die beiden Würfel und heben Sie die Sichtbarkeit der Geraden hervor.
- b) Berechnen Sie die Koordinaten der Durchstosspunkte.
- c) Berechnen Sie den spitzen Winkel zwischen der Geraden g und der z-Achse.

Aufgabe 2 Infinitesimalrechnung / Analysis (9 Punkte)

Hält man einen Gegenstand zu nahe vor die Augen, so kann man ihn nicht mehr scharf sehen. Als "Nahpunkt" bezeichnet man den Punkt, mit dem geringsten Abstand zur Pupille, in dem man einen Gegenstand noch scharf sehen kann. Der Abstand des Nahpunktes von der Pupille nimmt mit dem Alter zu, unter anderem weil die Elastizität der Linse nachlässt.

Die folgende Tabelle zeigt die Abhängigkeit des Nahpunktes vom Alter:

Alter in Jahren	5	10	20	30	40	50	60	70
Abstand des Nahpunktes in cm	7	8	10	12	17	45	70	100

Im Folgenden geht es um die Funktion $y = f(x)$, welche dem Alter x in Jahren den Abstand des Nahpunktes von der Pupille y in cm zuordnet. y ändert sich kontinuierlich mit zunehmendem x , die Tabelle gibt nur einzelne Werte dieser Funktion wieder.

- a) Stellen Sie die Tabelle graphisch dar.
- b) Bestimmen Sie die mittleren Änderungsraten von $f(x)$ in den Intervallen
 α) von $x = 5$ bis $x = 20$ β) von $x = 40$ bis $x = 60$
Drücken Sie diese Ergebnisse in verständlicher Umgangssprache ohne mathematische Fachausdrücke aus.
- c) Wie viele Wendepunkte muss das Schaubild der Funktion $f(x)$ **mindestens** haben ?
Begründen Sie Ihre Antwort.

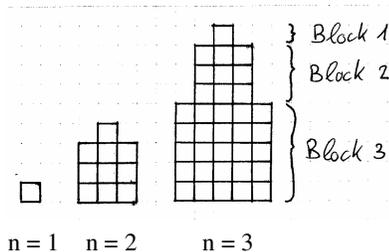
d) Durch die Funktionsgleichung $y = 6 + 0.2x + 14.8 \left(\frac{x}{50}\right)^5 + 20 \cdot 0.985^{((x-55)^2)}$

von $x = 0$ bis $x = 70$ wird die Funktion $y = f(x)$ näherungsweise berechnet.

Bestimmen Sie die Wendepunkte der Näherungsfunktion und ihre Steigung in den Wendepunkten. Drücken Sie diese Ergebnisse mit Bezug auf die reale Bedeutung der Funktion in verständlicher Umgangssprache ohne mathematische Fachausdrücke aus. Verwenden Sie dabei sinnvoll gerundete Werte.

Aufgabe 3 Folgen und Reihen (8 Punkte)

Ein "Turm" wird folgendermassen aus Zellen (Häuschen) gebaut:



Anzahl Blöcke: n = 1 n = 2 n = 3

- a) Wie hoch wird der Turm mit zehn Blöcken, wenn eine Zelle 1m hoch ist ?
- b) Wie viele Zellen hat der unterste Block vom n-ten Turm ?
- c) Wie viele Zellen sind bei 100 Blöcken insgesamt gebraucht worden ?
- d) Wie lautet die allgemeine (explizite) Formel, mit der man die Anzahl Zellen bei n Blöcken berechnen kann ?

Aufgabe 4 Wahrscheinlichkeitsrechnung (10 Punkte)

Beim Spiel Master Mind wählt der Spieler A vier farbige Steckknöpfe, die es in acht verschiedenen Farben gibt, aus und steckt sie nebeneinander in die vier Löcher einer Knopfreihe. Anschliessend verdeckt er sie mit einer Kappe, sodass sie Spieler B nicht sehen kann. Spieler B hat nun die Aufgabe die Farbkombination zu erraten, d.h. welche Farbe auf welchem Platz steckt.

- a) Wie viele Farbkombinationen sind mit den acht Farben möglich, wenn vier **verschiedene** Farben gewählt werden müssen ?
- b) Auf welche Zahl erhöht sich diese Anzahl, wenn die Farben auch mehrfach gewählt werden dürfen ?

Für die folgenden Aufgabenteile c – e gilt: Es müssen **vier verschiedene** Farben ausgewählt werden.

- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit errät Spieler B im ersten Versuch die Farbkombination ?
- d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit errät Spieler B im ersten Versuch zwar die richtigen vier Farben, aber von keiner der Farben den richtigen Platz?

Der Spieler B macht einen ersten Versuch die Farbkombination zu erraten. Der Spieler A teilt ihm daraufhin mit, dass er im ersten Versuch zwei richtige Farben erraten habe und eine davon sei auch auf dem richtigen Platz in der Viererreihe platziert.

- e) Mit welcher Wahrscheinlichkeit knackt B im zweiten Anlauf die Farbkombination ?

Aufgabe 5 Infinitesimalrechnung / Analysis (9 Punkte)

Die drei Kurven mit den Gleichungen

$y = f(x) = 2 \cdot \sqrt[3]{x}$, $y = g(x) = \frac{1.5}{x} + 0.5$ und $y = h(x) = \frac{5}{162}x^5 - \frac{13}{54}x^3$ begrenzen mehrere endliche Flächenstücke. Eines davon hat drei rechte Schnittwinkel.

- a) Fertigen Sie eine saubere Skizze dieses Flächenstücks an. (Einheit 2 cm)
- b) Bestimmen Sie die Koordinaten der drei Schnittpunkte dieses Flächenstücks.
- c) Weisen Sie durch **Rechnung** nach, dass sich die Kurven tatsächlich rechtwinklig schneiden. (Näherungsverfahren mit dem Taschenrechner geben hier nicht die volle Punktzahl)
- d) Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Flächenstücks.

Beiblatt zu Aufgabe 1

