Vorbemerkungen:

1. Erlaubte Hilfsmittel:
   - Formelsammlung Mathematik, Aarau
   - Taschenrechner TI 83 inkl. Handbuch
2. Nicht abbrechende Dezimalzahlen sind auf 3 geltende Ziffern zu runden.
3. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht bewertet.
4. Bei Lösungsschritten, die mit einem Rechnerprogramm ausgeführt werden, müssen die im Programm verwendeten Formeln angegeben werden.
5. Jede Aufgabe soll auf ein separates Blatt gelöst werden.
6. Es können maximal 66 Punkte erreicht werden. Für die Note 6 braucht es 57 Punkte.

---

**Aufgabe 1** Die "schiefe" Omelette, Analysis ( 2.5+0.5+2+4+6 = 15 Punkte)

Vorbemerkung: Die in dieser Aufgabe vorkommenden Omeletten sollen als *unendlich dünn*, d.h. als (in der xy-Ebene liegende) *Gebiete* angesehen werden.

Eigentlich wollte Amanda für Ferdinand eine exakt *kreisförmige* Omelette mit dem Zentrum M(5/0) und dem Radius 5 backen. Statt dessen erhielt sie ein etwas unregelmässig geformtes Gebiet, dessen "oberer" (d.h. im 1.Quadranten liegender) Rand gleich dem Kurvenbogen $y = \sqrt{0.1\,x\,(x-10)\,(x-15)}$ , $0 \le x \le 10$ ist. Der "untere" (d.h. im 4.Quadranten liegende) Omelettenrand ist gleich dem dazu bezüglich der x-Achse axialsymmetrisch gelegenen Kurvenbogen.

1.1. Zeichnen Sie ein exaktes Bild der oberen Hälfte von Amandas Omelette! Verwenden Sie dabei 1cm als Längeneinheit. Ergänzen Sie ihr Bild durch Hinzufügung der oberen Hälfte der ursprünglich geplanten kreisförmigen Omelette!
1.2. Wie lautet der zum unteren Rand von Amandas Omelette gehörende Funktionsterm?
1.3. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt F von Amandas Omelette etwas kleiner als derjenige der kreisförmigen ist! Um wie viel Prozent ist F kleiner als der Kreisinhalt?
1.4. Amanda überlegt sich, was passierte, wenn man ihre Omelette mit Hilfe der durch die Punkte P(0/-5) und Q(10/5) gehenden Geraden s in zwei Teilgebiete zerschnitte. Welchen Flächeninhalt erhielte bei dieser Zerlegung das obere Teilgebiet?
1.5. Zuletzt will Ferdinand unter Amandas Omelette ein rechteckiges Tablett schieben. Dieses Tablett soll folgende Eigenschaften haben:
- Die Seiten des Tablettes sollen die x-Achse unter Winkeln von 45° schneiden.
- Die Omelette soll nirgends über das Tablett herausragen.
- Das Tablett soll möglichst klein sein.

1.5.1. Geben Sie die Koordinaten der vier Eckpunkte des Tablett-Rechtecks an!
1.5.2. Handelt es sich bei dem Rechteck um ein exaktes Quadrat?

**Aufgabe 2** zwei voneinander unabhängige Kurzprobleme ( 4+5 = 9 Punkte)

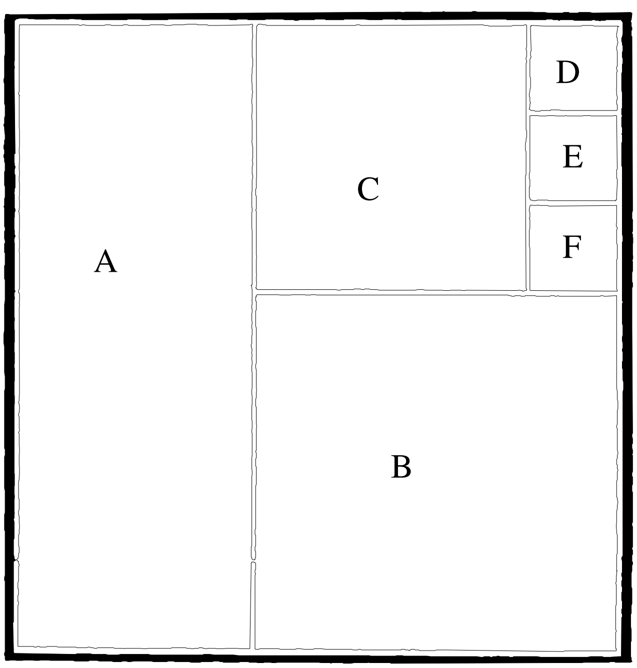
2.1. DENKWÜRDIG

Wir stehen vor einer «Zahlentafel» mit folgender Vorschrift:
1. Wählen Sie eine zweistellige Zahl und zähle 66 dazu!
2. Verdopplen Sie das Ergebnis!
3. Nehmen Sie vom Ergebnis 66 weg!
4. Verfünffachen Sie das Ergebnis!
5. Nehmen Sie vom Ergebnis das Zehnfache der ursprünglich gewählten Zahl weg!
6. Zählen Sie abschliessend vom Ergebnis 264 ab!

Und was haben wir nunmehr in der Hand? Richtig, die 66, ganz nach dem Motto «jeder Anfang führt ans Ende». Obwohl wir zu Beginn eine beliebige zweistellige Zahl ausgewählt haben, landen wir Mal für Mal bei der 66. Hierzu offerieren wir ein illustrierendes Beispiel: 33 _ 99 _ 198 _ 132 _ 660 _ 330 _ 66.
Merkwürdig? Nein - denkwürdig! Warum endet jede Zahlenkette mit der 66, gleichgültig, mit welcher Zahl wir die sechsstufige Zahlenmaschine füttern?

2.2. Die Figuren B, C, D, E und F sind Quadrate. Im Rechteck A ist das Verhältnis der Breite zur Länge 5 : 14. Alle sechs Figuren (A+B+C+D+E+F) haben einen Flächeninhalt von 1638 $cm^2$. Gesucht wird die Seitenlänge des Quadrates B.

**Hinweis:** Die unten stehende Figur ist lediglich eine Skizze.



**Aufgabe 3** Wahrscheinlichkeitsrechnen ( 1+2+3+2+3 = 12 Punkte)

In einer Urne befinden sich farbige Kugeln. Die Wahrscheinlichkeit, beim zufälligen Ziehen eine grüne Kugel zu entnehmen, beträgt $\frac{8}{35}$. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit für eine gelbe Kugel beträgt $\frac{2}{5}$. Die Wahrscheinlichkeit, eine rote Kugel zu ziehen, beträgt $\frac{5}{14}$.

3.1. Befinden sich noch andersfarbige Kugeln in der Urne? Begründe!

3.2. Nacheinander zieht man 3 Kugeln aus der Urne, wobei die gezogene Kugel jeweils wieder zurückgelegt wird. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass je eine gelbe, rote und grüne Kugel gezogen wurden?

3.3. Es werden 3 Kugeln gleichzeitig herausgenommen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei grün sind, wenn bekannt ist, dass insgesamt zwischen 100 und 200 Kugeln in der Urne liegen?

3.4. Wieviele Kugeln muss man mindestens ziehen (und jeweils wieder zurücklegen), um mit einer Sicherheit von 99.9 % mindestens eine gelbe Kugel zu erhalten?

3.5. Jemand beschliesst, Kugeln zu ziehen und jeweils wieder zurückzulegen, und zwar solange, bis entweder eine gelbe oder eine rote Kugel erscheint. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dies eine rote Kugel sein?

**Aufgabe 4** Raumgeometrie/Vektorgeometrie ( 1+2+8+1+3 = 15 Punkte)

Gegeben ist ein Würfelgebilde mit drei Kanten auf den Koordinatenachsen und zwei "L-Fortsätzen" wie in der Abbildung Seite 5 zu sehen ist.

4.1. Stellen Sie eine Geradengleichung g durch die Punkte P und Q auf.

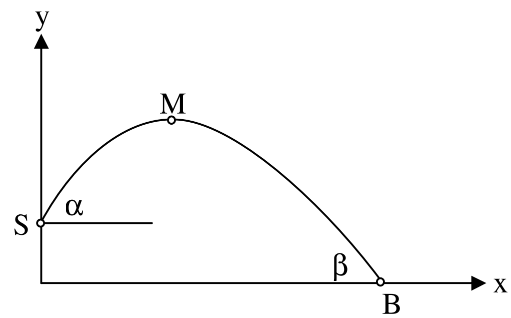
4.2. Bestimmen Sie die Koordinaten des Durchstosspunktes von g mit der xz-Ebene (Konstruktion und Berechnung).

4.3. Konstruieren Sie die Durchstosspunkte der Geraden h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit dem Würfelgebilde. Berechnen Sie die exakten Koordinaten dieser Punkte und bestimmen Sie auch die Sichtbarkeit der Geraden.

4.4. Das Würfelgebilde wird nun zuerst mit 90° nach hinten um die z-Achse und anschliessend mit 90° nach links um die x-Achse gedreht.

Zeichnen Sie in ein neues Koordinatensystem das Würfelgebilde in dieser Lage. Wie lauten die Koordinaten von P und Q ?

**<u>Aufgabe 5</u>** Sonjas Ballwürfe, Analysis (5+3+2+5 = 15 Punkte)




Gegeben sind die Punkte S(0/2) und B(10/0) . Die Längeneinheit beträgt 1m .
Sonja wirft nun einen (als punktförmig gedachten) Ball von S aus derart nach oben rechts, dass er in B auf dem Fußboden auftrifft. Seine Flugbahn ist, wie aus der Physik bekannt ist, eine nach unten geöffnete Parabel zweiten Grades.

5.1. Beim ersten Wurf von Sonja hat der "Abwurfwinkel" $\alpha$ den Wert 45°.
Berechnen Sie den "Aufprallwinkel" $\beta$ und die Koordinaten des höchsten Punktes M der Flugbahn! Zeichnen Sie die Flugbahn im Maßstab 1:100 !

5.2. Beim zweiten Wurf möchte Sonja erreichen, dass $\beta$ den Wert 70° erhält.
Unter welchem Winkel $\alpha$ muss sie den Ball abwerfen?

5.3. Zeigen Sie, dass für jeden positiven Wert von p durch den Graphen der Funktion
$x \mapsto -p\,x^2 + (10p - 0.2)\,x + 2$ eine mögliche Wurfparabel beschrieben wird! Dabei soll eine Wurfbahn als "möglich" bezeichnet werden, wenn sie S und B verbindet.

5.4. Bei einem dritten Ballwurf von Sonja zeigt sich nachträglich, dass $\beta$ genau doppelt so groß ist wie $\alpha$ .
Welche Werte haben jetzt $\alpha$ und $\beta$ ? Berechnen Sie zusätzlich auch hier wieder die Koordinaten von M und fügen Sie in das vorher erstellte Bild auch noch die zugehörige dritte Wurfparabel ein!
*Tipp*: Verwende zur Lösung von 5.4. die Nummer 5.3.!

**Beiblatt zu Aufgabe 4**