Vorbemerkungen:

1. Erlaubte Zeit: 4 Stunden
2. Erlaubte Hilfsmittel: - Formelsammlung Mathematik, Aarau
   - Taschenrechner TI 83 inkl. Handbuch
2. Nicht abbrechende Dezimalzahlen sind auf 3 geltende Ziffern zu runden.
3. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht bewertet.
4. Bei Lösungsschritten, die mit einem Rechnerprogramm ausgeführt werden, müssen die im Programm verwendeten Formeln angegeben werden.
5. Jede Aufgabe soll auf ein separates Blatt gelöst werden.
6. Es können maximal 66 Punkte erreicht werden. Für die Note 6 genügen 57 Punkte.

Aufgabe 1 Vektorgeometrie (1+2.5+1+1+2+2.5+2+3 = 15 Punkte)

Ein Flugzeug wird vom Kontrollturm zur Zeit t = 0 Sekunden im Punkt P_0 (40/0/60) geortet. Zur Zeit t = 1 s befindet es sich am Ort P_1 (20/90/120). Alle Koordinaten sind in Metern gemessen. Wir nehmen an, dass sich das punktförmige Flugzeug auf einer geraden Bahn mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{v}$ fortbewegt.

1.1. Zeichne in das beiliegende Koordinatensystem die beiden Punkte P_0 und P_1 sowie die Flugbahn g ein.

1.2. Gib eine Parametergleichung der Flugbahn g an.
Von welchem Punkt S aus und wann hat das Flugzeug vom Boden – also von der xy-Ebene – abgehoben?

1.3. Wie viele Sekunden nach dem Abheben erreicht es die Flughöhe 900 m über der Startbahn?

1.4. Berechne den Betrag v der Geschwindigkeit. Gib das Resultat in km/h an.

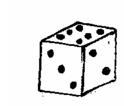
1.5. Die yz-Ebene sei eine Grenze im Luftraum. Zu welchem Zeitpunkt und in welchem Punkt Q verlässt das Flugzeug den momentanen Luftraum? Zeichne diesen Punkt Q auch im Koordinatensystem ein.

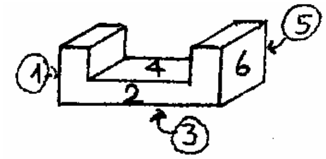
1.6. Trifft das Flugzeug auf seiner Bahn den Punkt B (-180/990/700)? Falls es sich bei B um eine Bergspitze handelte, würde es in den Berg hinein fliegen oder nicht?

1.7. Berechne den Winkel φ, unter dem das Flugzeug von der Startbahn abhebt.

1.8. Die Flugüberwachung befinde sich im Punkt K (-95/0/15). Wie nahe fliegt das Flugzeug an K vorbei? Berechne den Abstand d auf ganze Meter gerundet.

Aufgabe 2 Wahrscheinlichkeitsrechnen (2+4+2+3 = 11 Punkte)

Kain und Abel spielen mit einem normalen Laplacewürfel  und

einem U-Würfel 

, der die folgende Verteilungstabelle hat:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
U-Würfel	10%	10%	22%	38%	10%	10%

2.1. Abel würfelt die Serie 4, 1, 3, 4, 6, 4, 5, 3, 2, 4.
Kain muss herausfinden, ob Abel den normalen Laplacewürfel oder den U-Würfel benutzt hat. Hilf ihm!

2.2. Kain und Abel würfeln abwechselnd. Jeder wirft seinen Würfel maximal zweimal. Sieger ist, wer zuerst eine ungerade Zahl würfelt. Wer beginnen darf, muss mit dem U-Würfel spielen, der zweite Spieler benützt den Laplacewürfel.
Soll Kain beginnen oder als Zweiter mit dem normalen Laplacewürfel spielen?
Wie sieht es aus, wenn Sieger ist, wer zuerst eine 6 würfelt?

2.3. Beide Würfel werden gleichzeitig geworfen. Die Augenzahl, die auf dem U-Würfel erscheint, bestimmt die Zehnerziffer X, die Augenzahl auf dem Laplacewürfel die Einerziffer Y einer zweistelligen Zahl.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass XY eine Zahl zwischen 20 und 40 ist?

2.4. Auf mindestens einem der beiden Würfel ist eine gerade Zahl erschienen.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass XY eine gerade Zahl ist?

Aufgabe 3 zwei voneinander unabhängige Kurzprobleme (7+7 = 14 Punkte)

3.1 <u>Das Fest auf dem Land</u>

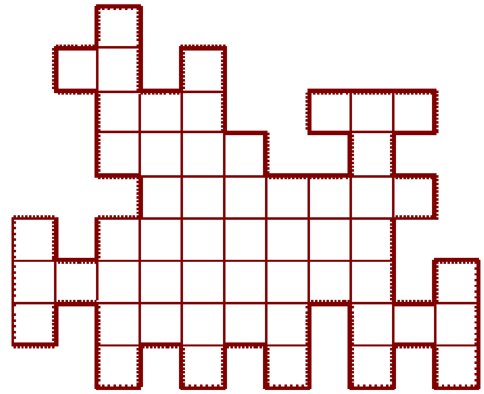
Zu einem großen Fest auf dem Lande fährt eine stattliche Menge von Pferdewagen. Auf jedem Wagen sitzen gleich viele Personen. Auf halbem Weg fallen zehn Wagen aus, so dass jeder der übrigen eine weitere Person aufnehmen muss. Vor Antritt des Rückweges fallen dann nochmals weitere 15 Wagen aus, was zur Folge hat, dass in jedem Wagen drei Personen mehr sind als bei der Abfahrt am Morgen.

3.1.1. Wie viele Personen nahmen an dem Fest teil?

3.1.2. Wie viele Wagen fuhren urspünglich aus?

3.2. Der letzte Wille des Pharao

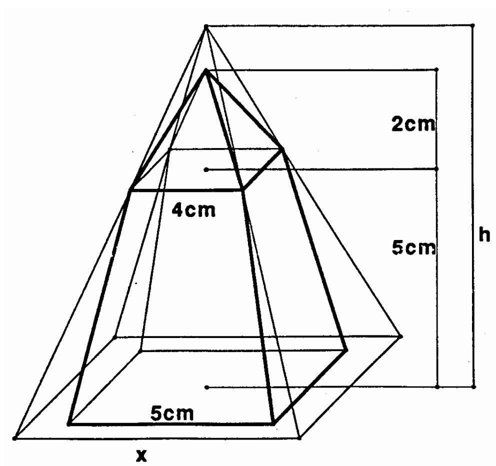
Die sechs Kinder des Pharaos erben das Reich ihres Vaters. Der Pharao hat in seinem letzten Willen festgelegt, dass die Landstücke, die sie erhalten, deckungsgleich sein sollen (wobei auch spiegelbildlich deckungsgleich erlaubt ist).
Wie ist nun das Reich aufzuteilen, damit dem letzten Willen des Pharaos entsprochen wird?
Zeichne die Figur auf deinem Blatt
(1 Quadrat = 1 cm^2) und kennzeichne die 6 Teilgebiete mit verschiedenen Farben!



Aufgabe 4 Raumgeometrie / Analysis (2+4+4+1 = 11 Punkte)

Die Firma GB-Duft will ein neues Parfum auf den Markt bringen. Wegen der gegebenen Form nennt sie es "Pyramid". Das Fläschchen besteht aus einem quadratischen Pyramidenstumpf mit einer aufgesetzten kleineren, flacheren Pyramide. Die Grundseite des Pyramidenstumpfes ist 5 cm lang, die Deckseite 4 cm und die Höhe 5 cm. Die Höhe der kleineren Pyramide ist 2 cm.

Als Verpackung wählt die Firma GB-Duft eine quadratische Pyramide mit der Grundseite x und der Höhe h. (siehe Skizze)



4.1. Berechne das Volumen des Parfumfläschchens.

4.2. Beweise, dass $h = \dfrac{5x}{x-4}$ ist.

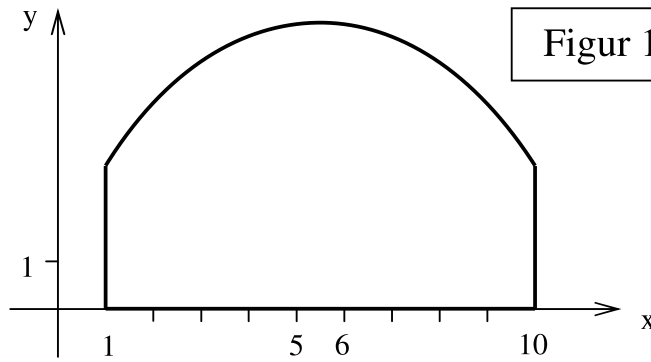
4.2. Die Firma will möglichst wenig Füllmaterial brauchen, da dieses extrem teuer ist. Wie gross müssen x und h gewählt werden?

4.3. Berechne das minimale Füllmaterial in cm^3.

Aufgabe 5 Dreimalige Dreigliederung eines Fensters (1+1+2+2+3+3+3 = 15 Punkte)

Gegeben ist das in Figur 1 dargestellte Fenster. Seine Abmessungen ergeben sich teils direkt aus der Figur, teils aus der Tatsache, dass der obere Begrenzungsbogen ein Teil des Graphen der Funktion

$x \mapsto \frac{1}{27} \cdot \left(-4x^2 + 44x + 41\right)$ ist.

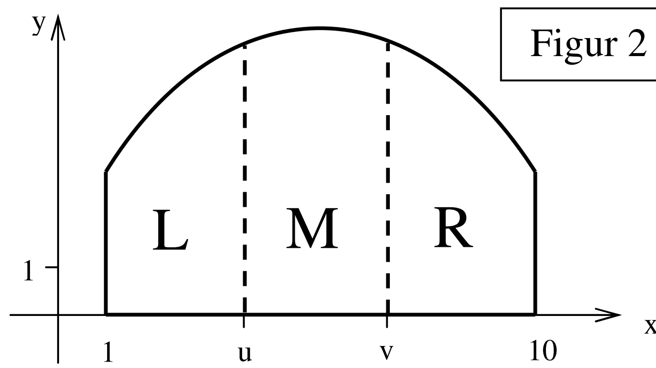


Figur 1

5.1. Zeichne das Fenster exakt auf dein Blatt (LE = 1cm).

5.2. Ermittle die Längen der vertikalen, seitlichen Begrenzungsstrecken sowie die Gesamthöhe des Fensters.

Das Fenster soll nun durch zur *y-Achse* parallele Strecken dreigegliedert werden, wie die folgende Figur 2 zeigt:

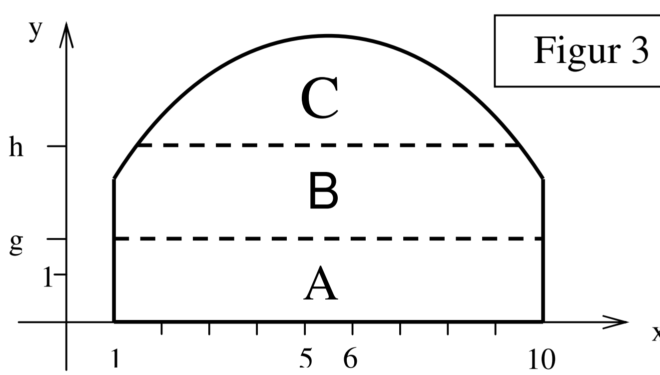


Figur 2

5.3. Der Sims, d.h. das Intervall $1 \le x \le 10$, soll zunächst durch die Stellen $x = u$ und $x = v$ in drei gleich lange Teile zerlegt werden. Wieviel % der gesamten Glasfläche werden dann von L, M und R eingenommen?

5.4. Anschließend sollen umgekehrt L, M und R gleich groß sein. Für welche Werte von u und v ist das der Fall?

Nun soll das Fenster gemäß Figur 3 durch zur *x-Achse* parallele Strecken untergliedert werden:

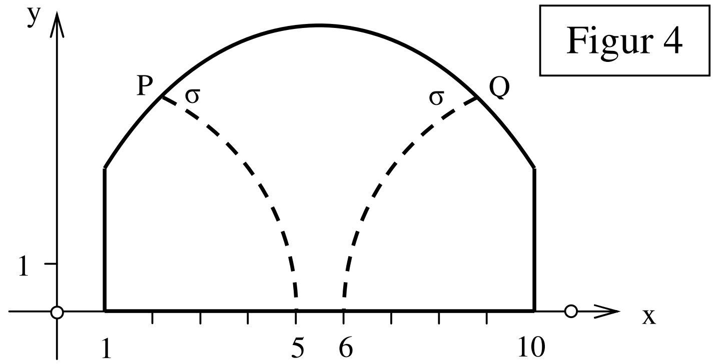


Figur 3

5.5. Die Werte von g und h sind so gewählt, dass durch die zugehörigen Punkte auf der y-Achse die Gesamthöhe des Fensters exakt gedrittelt wird. Berechne die Flächeninhalte A, B und C.

Nun werde noch eine letzte Dreigliederung betrachtet (Figur 4). Die gestrichelt eingetragenen Linien sind *Kreisbogen*. Beide haben den Radius 5; ihre Zentren sind
(0/0) und (11/0) :

5.6. Ermittle die Koordinaten der Punkte P und Q !
5.7. Berechne die Größe der in Figur 4 mit σ bezeichneten Schnittwinkel.



Beiblatt zu Aufgabe 1