Vorbemerkungen:
1. Erlaubte Zeit: 4 Stunden
2. Erlaubte Hilfsmittel:
   - Formelsammlung Mathematik, Aarau
   - Taschenrechner TI 83 inkl. Handbuch
3. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht bewertet.
4. Bei Lösungsschritten, die mit einem Rechnerprogramm ausgeführt werden, müssen die im Programm verwendeten Formeln angegeben werden.
5. Jede Aufgabe soll auf ein separates Blatt gelöst werden.
6. Es können maximal 77 Punkte erreicht werden. Für die Note 6 genügen 70 Punkte.

Aufgabe 1 Analysis (2.5+1+1.25+1.5+1.25+1+1.5 = 10 Punkte)

Die Grafik auf dem Beiblatt 1 ist dem Buch „Lernen" des Gehirnforschers Manfred Spitzer entnommen. Sie zeigt, dass gewisse Formen des Lernens untrennbar mit einer großen Anzahl von Wiederholungen bzw. Übungsstunden verbunden sind und dass auch besonders Begabten ihr Können keineswegs in den Schoß fällt. Der Originaltext unter der Grafik wird zur Lösung der Aufgabe nicht gebraucht.

In der Aufgabe zu dieser Grafik geht es nur um die Kurve, die mit „professionelle Streicher" bezeichnet ist (oberste Kurve). Die x-Achse zeigt das Alter von Jugendlichen, die später Berufsmusiker wurden. Die y-Achse zeigt die mittlere Zeitdauer in Stunden, die jeder dieser Jugendlichen mit Üben auf seinem Instrument in seinem Leben bereits zugebracht hatte, als er x Jahre alt war.

1.1. Lies aus der Grafik die schwarz markierten Werte für x = 8, 12, 16 und 20 ab, so genau dies mit Hilfe eines Geodreicks möglich ist. Mach eine begründete Angabe darüber, wie genau die y-Werte auf diese Weise abgelesen werden können.

1.2. Prüfe, ob die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 0.236 * x^{3.58}$ mit den in Aufgabe 1 abgelesenen Werten im Rahmen der von dir festgestellten Ablesegenauigkeit übereinstimmt. Für die weiteren Teilaufgaben ist diese Näherungsfunktion f zu verwenden.

1.3. Gib die Gleichung der Ableitung f ' an und berechne f '(12).

1.4. Wie lange übt ein späterer Profigeiger während seines 12. Lebensjahres durchschnittlich täglich auf der Geige?

1.5. Wie lange übt ein genau 12 Jahre alter späterer Profigeiger täglich auf seinem Instrument?

1.6. Stelle die Gleichung einer Funktion auf, die die tägliche Übungszeit eines späteren Profigeigers in Abhängigkeit von seinem Alter angibt.

1.7. Die Funktion f gibt für x-Werte über 20 den dargestellten Sachverhalt nicht mehr unbedingt richtig wieder. Von welchem x-Wert an trifft deiner Meinung nach f sicher nicht mehr zu? Warum?

Aufgabe 2 Wahrscheinlichkeitsrechnen (1+2+2+2+2+2+4 = 15 Punkte)

Zwei Brüder spielen:
David hat fast nur Schach im Kopf und nervt seine Umgebung mit ständigem Bitten um das Spielen einer Partie. Um vor ihm etwas Ruhe zu haben, hat sein großer Bruder Philipp versprochen, mit ihm drei Partien zu spielen. Vorläufig ist er noch der stärkere Spieler: Er besiegt David mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% und wird nur mit 10% Wahrscheinlichkeit von ihm geschlagen. Die übrigen 30% aller Partien enden also "remis" (= unentschieden).

2.1. Zu berechnen ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
  2.1.1. David alle drei Partien verliert.
  2.1.2. David genau einmal gewinnt.
  2.1.3. David mindestens einmal gewinnt.
  2.1.4. mindestens zwei der drei Partien remis enden.

2.2. Die Mutter der beiden Jungen hört im Nebenzimmer, wie nach der ersten Partie "Schachmatt!" gerufen wird. Wie groß ist jetzt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Philipp der Sieger ist?

2.3. Damit David etwas mehr Gewinnchancen bekommt, schlägt ihm Philipp noch ein von Schach verschiedenes Spiel vor, bei welchem mit regulären Tetraedern gewürfelt wird. Bei jedem Wurf erscheint also eine der vier Augenzahlen 1, 2, 3 oder 4 mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Das Spiel besteht darin, dass zuerst Philipp und dann David würfelt. Ist dabei Davids Augenzahl um genau 1 größer als diejenige von Philipp, so ist das Spiel zu Ende und David hat gewonnen. Andernfalls darf Philipp noch *einmal* würfeln. Ist jetzt seine Augenzahl um genau 1 größer als diejenige von David, so ist Philipp Sieger. Sonst ist das Spiel ohne einen Sieger beendet.

  2.3.1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt David dieses Spiel?
  2.3.2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet das Spiel ohne Sieger?

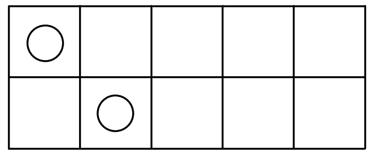
Aufgabe 3 zwei voneinander unabhängige Kurzprobleme (7+10 = 17 Punkte)

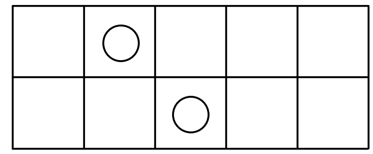
3.1. Bestseller-Autoren

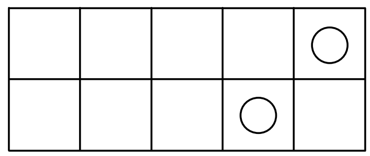
Fritz liest in der Zeitung. "Passt einmal auf, was die da schreiben", sagt er zu seinen drei Brüdern Uwe, Theo und Werner. "Sie haben ermittelt, welches die 7 am häufigsten übersetzten Autoren sind. Es handelt sich um Enid Blyton, Tolstoi, Jules Verne, Agatha Christie, Lenin, Karl Marx und Georges Simenon. Was meint ihr, in welcher Reihenfolge diese Autoren genannt werden?"
Uwe tippt auf: 1. Agatha Christie, 2. Tolstoi, 3. Jules Verne, 4. Karl Marx, 5. Georges Simenon, 6. Lenin, 7. Enid Blyton.
Theo dagegen hält die folgende Reihenfolge für richtig: 1. Lenin, 2. Agatha Christie, 3. Enid Blyton, 4. Karl Marx, 5. Georges Simenon, 6. Tolstoi, 7. Jules Verne.
"Hervorragend", sagt Fritz anerkennend. Uwe hat die Platzierung von 4 Autoren richtig erraten, Theo sogar von 5 Autoren!"
Darauf hin konnte Werner nach einigem Nachdenken die richtige Reihenfolge nennen. Wie lautet diese, und welche Überlegungen führten Werner zu ihr?

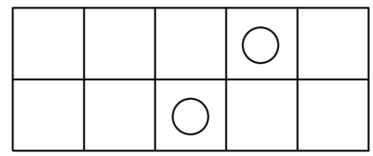
3.2. Juans Spielmarken

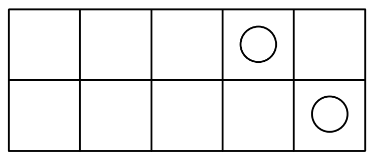
Juan besitzt Spielmarken, von denen jede ein rechteckiges Metallplättchen vom Format 2 cm x 5 cm ist, bei welchem aus zwei der quadratischen Felder je ein Kreis vom Durchmesser 0.5 cm ausgestanzt wurde. Jede Spielmarke hat also zwei kreisförmige Löcher (Siehe die Beispielfiguren; die Kreise liegen zentral im jeweiligen Feld). Zwei dieser Spielmarken sind vom gleichen Typus, wenn sie durch Drehen oder Umwenden (oder beidem kombiniert) zur Deckung gebracht werden können. So gehören etwa die durch die Figuren 1, 1' und 1" dargestellten Marken zu einem ersten Typus, die in den Figuren 2 und 2' abgebildeten zu einem davon verschiedenen zweiten Typus etc..


Figur 1


Figur 2

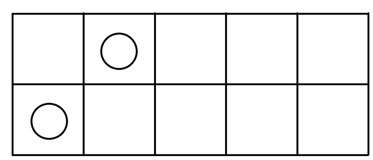

Figur 1'


Figur 2'


Figur 1"

<u>Juan hat nun sich (und uns) die Aufgabe gestellt, von jedem möglichen Typus genau ein Exemplar zu zeichnen.</u>

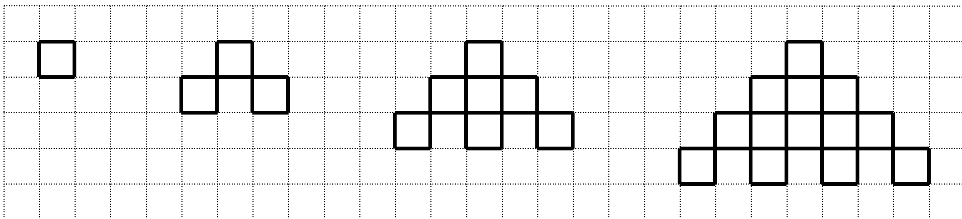
Beispiel: Außer den Figuren 1, 1', 1" zeigt auch noch die nebenstehend gezeigte Figur 1"' den gleichen (ersten) Typus. Es wäre hier also notwendig, *eine* der vier Figuren 1, 1', 1" oder 1"' zu zeichnen, aber *keine* der übrigen drei.


Figur 1"'

► Bei der Bewertung wird besonders darauf geachtet, dass die Liste der Figuren <u>vollständig</u> ist, dass von keinem Typus mehrere Zeichnungen vorkommen und dass die ganze Aufstellung übersichtlich und sauber zu Papier gebracht ist.

Aufgabe 4 Folgen und Reihen (1+1.5+2+2+1+2.5 = 10 Punkte)

Aus Streichhölzern sollen auf folgende Weise Figuren gelegt werden:



Figur 1 Figur 2 Figur 3 Figur 4

4.1 Zeichne selbst Figur 5.
4.2. Aus wie vielen Streichhölzern besteht die Figur 20?
4.3. Wie lautet die Vorschrift, um von der Anzahl Streichhölzer der Figur n zur jener der Figur $n+1$ zu kommen?
4.4. Wie lautet die allgemeine Vorschrift, mit der du die Anzahl Streichhölzer der Figur n direkt berechnen kannst? Wie viele Streichhölzer brauchst du für $n = 500$?
4.5. Figur 1 enthält ein Quadrat, Figur 2 drei Quadrate, Figur 3 sieben Quadrate. Figur n enthält $n^2 - n + 1$ Quadrate, die ganz von vier Hölzchen eingeschlossen sind. Zeige, dass diese Formel für $n = 4$ und $n = 5$ zutrifft.
4.6. In Figuren 1 und 2 werden 4 Hölzchen pro Quadrat benötigt. In Figur 3 werden 24 Hölzchen für 7 Quadrate gebraucht, es werden also pro Quadrat im Mittel $3\,{}^{3}/_{7}$ Hölzchen gebraucht. Wie viele Hölzchen werden im Mittel pro Quadrat in der Figur n gebraucht? Gegen welchen Grenzwert strebt diese Zahl für $n \to \infty$?

Aufgabe 5 (3.5+1.5+2.5+2.5 = 10 Punkte)

Die y-Achse sowie die Schaubilder von f(x) und g(x) schließen ein Flächenstück mit der Form eines Fisches ein. Die Funktionsgleichungen lauten:

$$f(x) = -0.0025x^5 + 0.06x^4 - 0.565x^3 + 2.46x^2 - 4.14x$$

$$g(x) = -f(x) + 0.6x - 6$$

5.1. Berechne die drei Winkel in den Spitzen der Schwanzflosse und am Kopfende.
5.2. Berechne den Flächeninhalt der Figur.
5.3. Die untere Begrenzungskurve soll in y-Richtung parallel verschoben werden, so dass sie die obere Kurve in einem Punkt zwischen Schwanzflosse und Fischkörper gerade berührt. Wie lautet die Funktionsgleichung der verschobenen Kurve?
5.4. Die Figur soll durch das Schaubild einer Funktion, welches vom Punkt (0 / –3) zum Schnittpunkt am Kopfende verläuft, in zwei Teile gleichen Flächeninhalts zerlegt werden. Stelle die Gleichung einer solchen Funktion auf. Dass ihr Schaubild den Flächeninhalt des Fisches in zwei gleiche Teile zerlegt, ist zu begründen oder durch Flächenberechnung nachzuweisen.

Aufgabe 6 Vektorgeometrie (2+1+1.5+2.5+1.5+2+3+1.5 = 15 Punkte)

Gegeben sind die beiden Punkte A(8/-2/0) und B(2/10/0) und die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6.1. Zeichne die beiden Punkte und die Gerade in das beigelegte Koordinatensystem und bestimme die gegenseitige Lage der Strecke AB und der Geraden g.

Wir betrachten Dreiecke mit den Ecken A und B, sowie der dritten Ecke C auf der Geraden g.

6.2. Zeige, dass alle Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben.

Berechne die Koordinaten der Ecke C, wenn das Dreieck

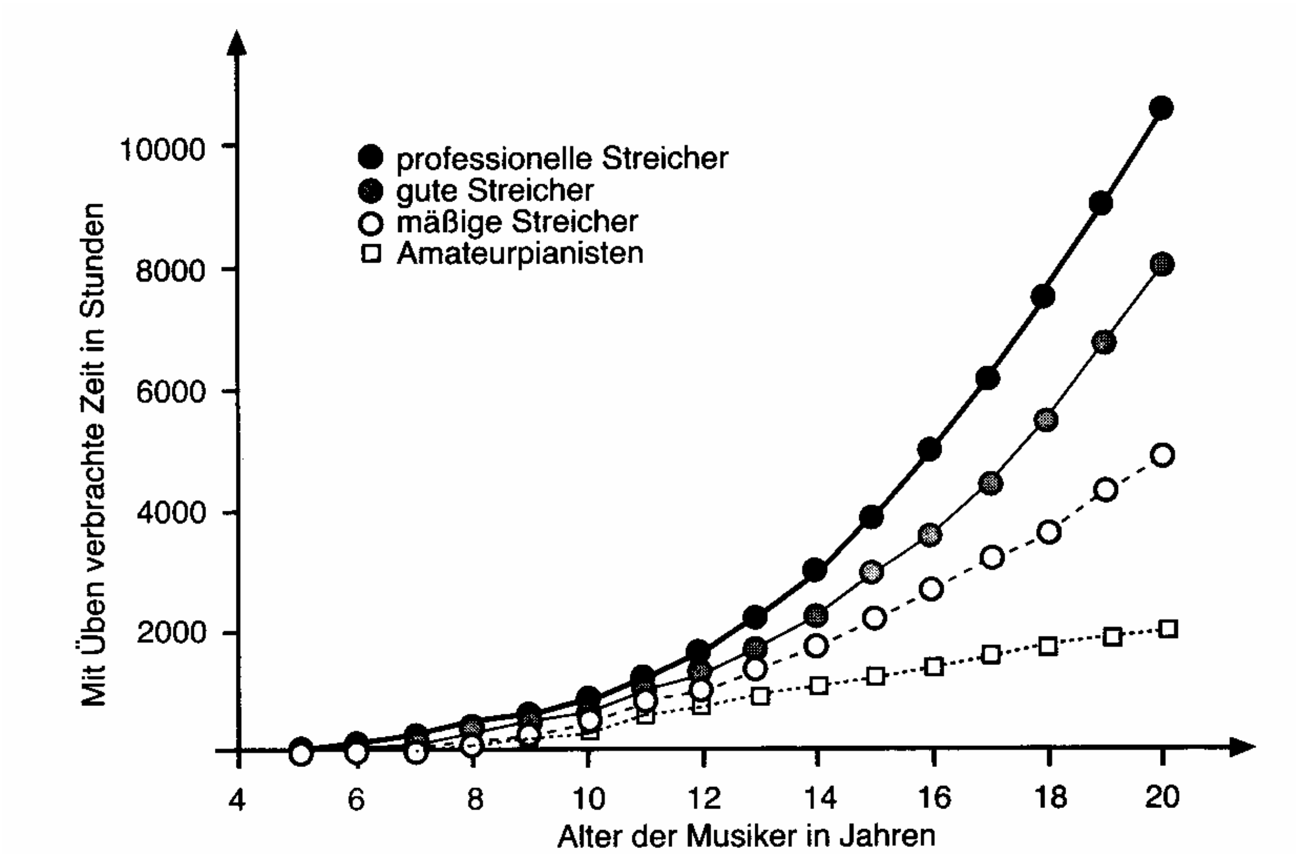
6.3. gleichschenklig ist (die Seite AB ist die Basis).
6.4. rechtwinklig ist (die Seite AB ist die Hypotenuse).

Eine Ebene ε rechtwinklig zur xy-Ebene gehe durch die Punkte A und B.

Im Punkt P(12/2/10) befindet sich ein Laser, dessen Strahl die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ hat.

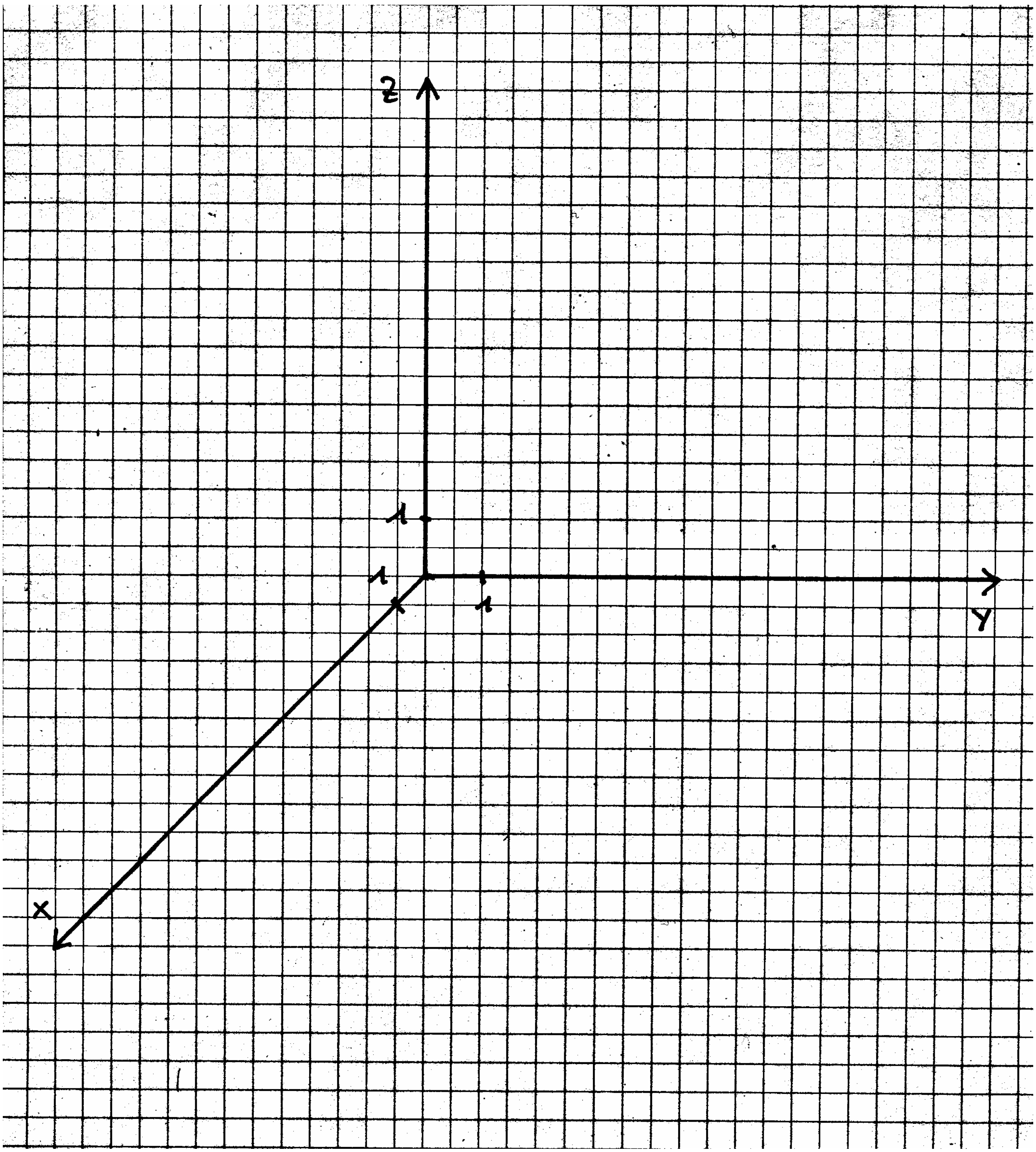
6.5. Zeichne die Spuren der Ebene ε und den Laserstrahl in das beigelegte Koordinatensystem.
6.6. Berechne oder konstruiere den Durchstosspunkt G des Lasers durch die Glasscheibe.
6.7. Berechne und konstruiere den Auftreffpunkt F des Lasers auf die xy-Ebene, wenn der Laserstrahl gradlinig (ohne Brechung) durch die Glasscheibe dringt.
6.8. Wenn die xy-Ebene ein Spiegel ist, wird der Laserstrahl reflektiert. Stelle die Gleichung des reflektierten Strahls auf.

Beiblatt zu Aufgabe 1



Zusammenhang zwischen der mit Üben am Instrument verbrachten Gesamt- zeit und dem Alter der Musiker. Die vier Kurven entsprechen den Werten für vier Gruppen mit unterschiedlichem erreichten professionellen Niveau. Wer ein Profi- Geiger wird, der hat mit zehn Jahren schon 1 .000 Stunden Geige gespielt, als Teenager (mit 15 Jahren) 4.000 Stunden und mit 20 Jahren mehr als 10.000 Stunden. Mäßige Streicher haben etwa halb so viel Zeit mit ihrem Instrument zugebracht und Amateurpianisten noch einmal die Hälfte davon (aus Spitzer 2002a, S. 317).

Beiblatt zu Aufgabe 6



Dieses Aufgabenblatt muss zusammen mit der Arbeit abgegeben werden.