Vorbemerkungen:

1. Erlaubte Zeit: 4 Stunden
2. Erlaubte Hilfsmittel:
   - Fundamentum Mathematik und Physik
   - Taschenrechner TI 83 inkl. Handbuch
3. Ergebnisse ohne Begründungen werden nicht bewertet.
4. Jede Aufgabe soll auf ein separates Blatt gelöst werden.
5. Es können maximal 73 Punkte erreicht werden. Für die Note 6 genügen 66 Punkte.

Viel Erfolg wünschen
Urs Handschin, Alexandra Luttropp, Frank Lutz, Philippe Meili, Halina Michalski und Andreas Stahel!

Aufgabe 1 Vektorgeometrie (1 + 4 + 4 + 2.5 + 2 + 2.5 = 16 Punkte)

Gegeben ist ein Körper, wie er auf dem Beiblatt gezeichnet ist: Ein Quader, der mit einer Ecke im Ursprung steht und dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind, mit einem aufgesetzten Würfel in seiner hinteren rechten Ecke.

1.1 Der ganze Körper besteht aus einem einzigen Stück Holz. Zeichne die sichtbaren Kanten farbig ein.

1.2 Die Gerade g geht durch die Punkte A(13/0/0) und B(3/10/5). Sie durchdringt den gegebenen Körper. Konstruiere alle Durchstosspunkte, d.h. diejenigen Punkte, in denen die Gerade in den Körper eindringt, resp. aus diesem austritt. Zeichne die sichtbaren Teilstücke der Geraden g farbig ein.

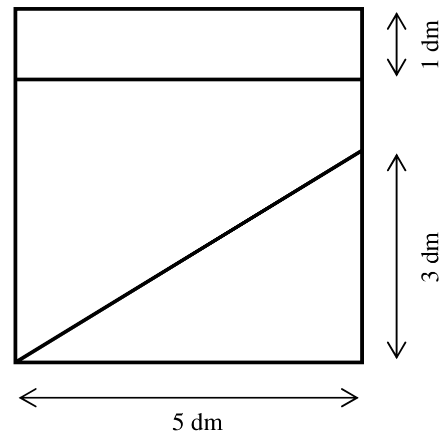
1.3 Berechne die Koordinaten des Durchstosspunktes D mit der kleinsten z-Koordinate sowie seinen Abstand vom Punkt B.

1.4 Die Gerade g schneidet die x-Achse im Punkt A. Berechne den Schnittwinkel φ zwischen g und der x-Achse.

1.5 Zeichne den Punkt P(3/8.5/4) in die Figur ein. Liegt er auf der Geraden g? (Die Zeichnung allein reicht nicht als Begründung!)

1.6 Berechne den Abstand der Ecke F(10/10/3) zur Geraden g.

Aufgabe 2 Wahrscheinlichkeitsrechnen (6 + 3 + 3 + 6 = 18 Punkte)



Karl und Eric sind auf dem Jahrmarkt. Sie bleiben an einer Schiessbude stehen. Dort kann man Dartpfeile auf die abgebildete quadratische Dartscheibe werfen. 3 Würfe kosten 6 Franken. Der Schiessbudenbesitzer Herr Schmidt ist sehr anständig. Trifft man die Scheibe nicht, zählt der Wurf nicht. Trifft ein Pfeil das Rechteck, bekommt man einen Teddybären, trifft man in das Dreieck gewinnt man einen kleinen Plüschhasen, trifft man in das Trapez, gibt es nur eine Plastikrose.

2.1 Karl ist ein ganz passabler Werfer. Da seine Freundin Teddybären liebt, zielt er bei allen drei Würfen auf das Bären-Rechteck. Er trifft es mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 %. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % trifft er das Hasen-Dreieck und mit einer Wahrscheinlichkeit von 15 % gewinnt er eine Plastikrose.

Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er
2.1.1 drei Plastikrosen gewinnt.
2.1.2 keinen Teddybären gewinnt.
2.1.3 mindestens ein Stofftier gewinnt.
2.1.4 einen Teddybären, einen Plüschhasen und eine Plastikrose gewinnt.

2.2 Karl möchte seiner Freundin unbedingt einen Teddybären mitbringen. Wie oft muss er mindestens werfen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9 % einen Teddy gewinnt?

2.3 Eric ist ein sehr schlechter Werfer. Er trifft jeden Punkt der Dartscheibe mit der gleichen Wahrscheinlichkeit, egal wohin er zielt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er mit einem Wurf
2.3.1 einen Teddybären?
2.3.2 einen Plüschhasen?
2.3.3 eine Plastikrose?

2.4 Herr Schmidt bezahlt im Einkauf für einen Teddybären 3 Franken, für einen Plüschhasen 2 Franken und für eine Plastikrose 0.50 Franken. Er hat an einem Abend im Durchschnitt 50 Kunden, muss also 150 Preise herausgeben.

Berechne den durchschnittlichen Gewinn von Herrn Schmidt pro Abend, wenn
2.4.1 nur so schlechte Werfer wie Eric zu ihm kommen.
2.4.2 er nur Kunden wie Karl hat.

Aufgabe 3 Infinitesimalrechnung (5 + 2 + 6 + 4 + 3 = 20 Punkte)

Jakobs Acker ist ein teilweise krummlinig begrenztes Viereck. Er wird berandet

- im Norden durch die Kurve mit der Gleichung $y = 0.0006 \cdot x^3 - 0.03 \cdot x^2 - 0.6 \cdot x + 60$,
- im Westen durch die y-Achse,
- im Osten durch diejenige Parallele zur y-Achse, welche den Punkt (60/0) enthält,
- im Süden durch die Verbindungsgerade der Punkte (0/–17) und (60/13) .

3.1 Fertige eine Skizze des Ackers an. Berechne zwei der Viereckswinkel, nämlich denjenigen in der nordwestlichen und denjenigen in der südöstlichen Ecke des Ackers.

3.2 Berechne den Flächeninhalt des Ackers.

3.3 Jakob möchte eine durch seinen Acker führende Gerade g so legen, dass sie genau nord-südlich verläuft und
3.3.1 die innerhalb des Ackers liegende Teilstrecke von g möglichst kurz ist.
3.3.2 sie den Acker flächenmäßig halbiert.
Gib für beide Teilaufgaben an, welchen Abstand g von der y-Achse haben muss.

3.4 Jakob steht in der südwestlichen Ecke seines Ackers und will von dort aus auf kürzestmöglichem Weg die Nordgrenze erreichen. Welchen (auf der Nordgrenze liegenden) Punkt N muss er ansteuern, und wie lang (bzw. wie kurz) wird sein Weg?

3.5 Im Rahmen einer "Flurbereinigung" muss der Kantonsgeometer die krumme Nordgrenze von Jakobs Acker durch eine gerade Strecke ersetzen. Dabei darf natürlich der Flächeninhalt nicht verändert werden. Zusätzlich soll die nordöstliche Ecke an Ort und Stelle bleiben. Wohin kommt die neue nordwestliche Ecke zu liegen?

Aufgabe 4 Folgen und Reihen (3 + 1.5 + 1 + 1.5 + 3 + 1 = 11 Punkte)

Der Rohstoffhaushalt unserer Erde ist begrenzt. Leider wächst der jährliche Verbrauch vieler Rohstoffe exponentiell. Für das Element Kupfer wird dieses exponentielle Wachstum beschrieben durch:

$$V_n = 4.2 \cdot 1.033^n$$

V_n ist gleich dem Verbrauch von Kupfer in Millionen Tonnen im Jahr n.

4.1 Berechne den Kupferverbrauch in den Jahren n = 1 bzw. n = 5 bzw. n = 20.

4.2 In welcher Zeit T verdoppelt sich der jährliche Kupferverbrauch?

4.3 Um wie viel Prozent steigt der Kupferverbrauch von Jahr zu Jahr?

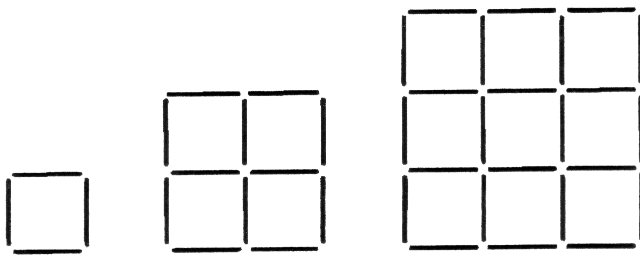
4.4 Berechne den gesamten Kupferverbrauch während der ersten 40 Jahre, d.h. beginnend mit dem Jahr n = 1.

4.5 Die weltweiten Kupfervorräte werden auf $780 \cdot 10^6$ Tonnen geschätzt. Wie lange reichen diese Vorräte, falls der Verbrauch weiterhin exponentiell mit der angenommenen Zuwachsrate steigt?

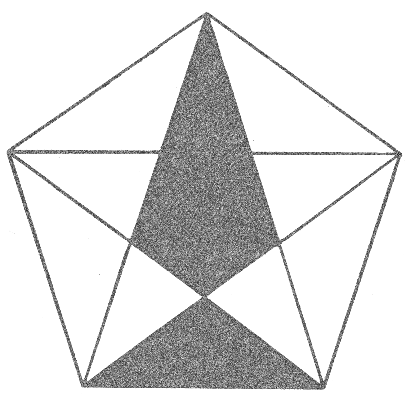
4.6 Wie lange würden diese Kupfervorräte reichen, wenn der momentane jährliche Verbrauch des Jahres n = 0 konstant bliebe?

Aufgabe 5 Zwei voneinander unabhängige Kurzprobleme (4 + 4 = 8 Punkte)

5.1 Wie viele Streichhölzer braucht man, um ein n^2 - Quadrat analog zu den abgebildeten 1^2 - , 2^2 - und 3^2 - Quadraten zusammenzubauen?



5.2 Gegeben sei ein regelmässiges Fünfeck mit eingezeichneten Diagonalen und zwei grau unterlegten Flächenstücken (vgl. Skizze). Wie lässt sich begründen, dass das obere exakt doppelt soviel Platz einnimmt wie das untere? Tipp: Die Aufgabe lässt sich ohne Rechnerei lösen.



Beiblatt zu Aufgabe 1