1 Vektorgeometrie

Matur 2006
Mathematik

1.1

$\longrightarrow$ Sichtbarkeit des Körpers vgl. Beiblatt — 1 P.

1.2

$\longrightarrow$ Konstruktion von <u>vier</u> Durchstosspunkten vgl. Beiblatt. — 4 P.

1.3

$A(13/0/0)$, $B(3/10/5)$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \left[= \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \text{ (z.B.)}$$

1 P.

Bedingung für D_1: $x = 10$

$$\Rightarrow \quad 10 = 13 + s \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad s = -0{,}3$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= s \cdot (-10) = (-0{,}3) \cdot (-10) = +3 \\ z &= s \cdot (-5) = (-0{,}3) \cdot (-5) = 1{,}5 \end{aligned}$$

4 P.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{D_1 \, (10/3/1{,}5)}}$$

2 P.

$$\overline{D_1B} = \sqrt{(10-3)^2 + (3-10)^2 + (1{,}5-5)^2} = \underline{\underline{10{,}5}}$$

1 P.

1.4

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} , \quad \vec{x}_{Achse} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

½ P.

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{225} \cdot \sqrt{1}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

1,5 P.

2,5 P.

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi = 48{,}190^\circ}}$$

½ P.

[Mit $\overrightarrow{AB}$ statt $\overrightarrow{BA}$ erhält man den Ergänzungswinkel zu φ; $\overline{\varphi} = 131{,}810^\circ$]

$\hookrightarrow$ nur 2 P. im Total.

(1.5) P einzeichnen (vgl. Beiblatt) ½ P.

$P \in g$? $P(3/8{,}5/4)$

$$\begin{pmatrix}3\\8{,}5\\4\end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix}13\\0\\0\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}10\\-10\\-5\end{pmatrix}$$ 1P.

2 P.

y-Koord: $8{,}5 = -10s \Rightarrow s = -0{,}85$
z-Koord: $4 = -5s \Rightarrow s = -0{,}8$ ↯ Widerspruch
(oder einsetzen)

$\Rightarrow$ $P \notin g$. ½ P.

(1.6) $F(10/10/3)$ Q auf g: $(13+10s/-10s/-5s)$ ½ P.

Idee: $\overline{FQ}$ minimieren!

$$\overline{FQ} = \sqrt{(10-13-10s)^2 + (10+10s)^2 + (3+5s)^2} = Y_1$$ 1P.

2,5 P.

mit minimum: $s = -0{,}644$ (x-Wert) ½ P.

$\overline{FQ} = 4{,}955$ (y-Wert) ½ P.

Variante: (aufwändig) $\vec{FQ} \perp \vec{BA} \Rightarrow \vec{FQ} \cdot \vec{BA} \stackrel{!}{=} 0$

$$\begin{pmatrix}10-13-10s\\10+10s\\3+5s\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}10\\-10\\-5\end{pmatrix} = 0$$

$$10(10-13-10s) - 10(10+10s) - 5(3+5s) = 0$$

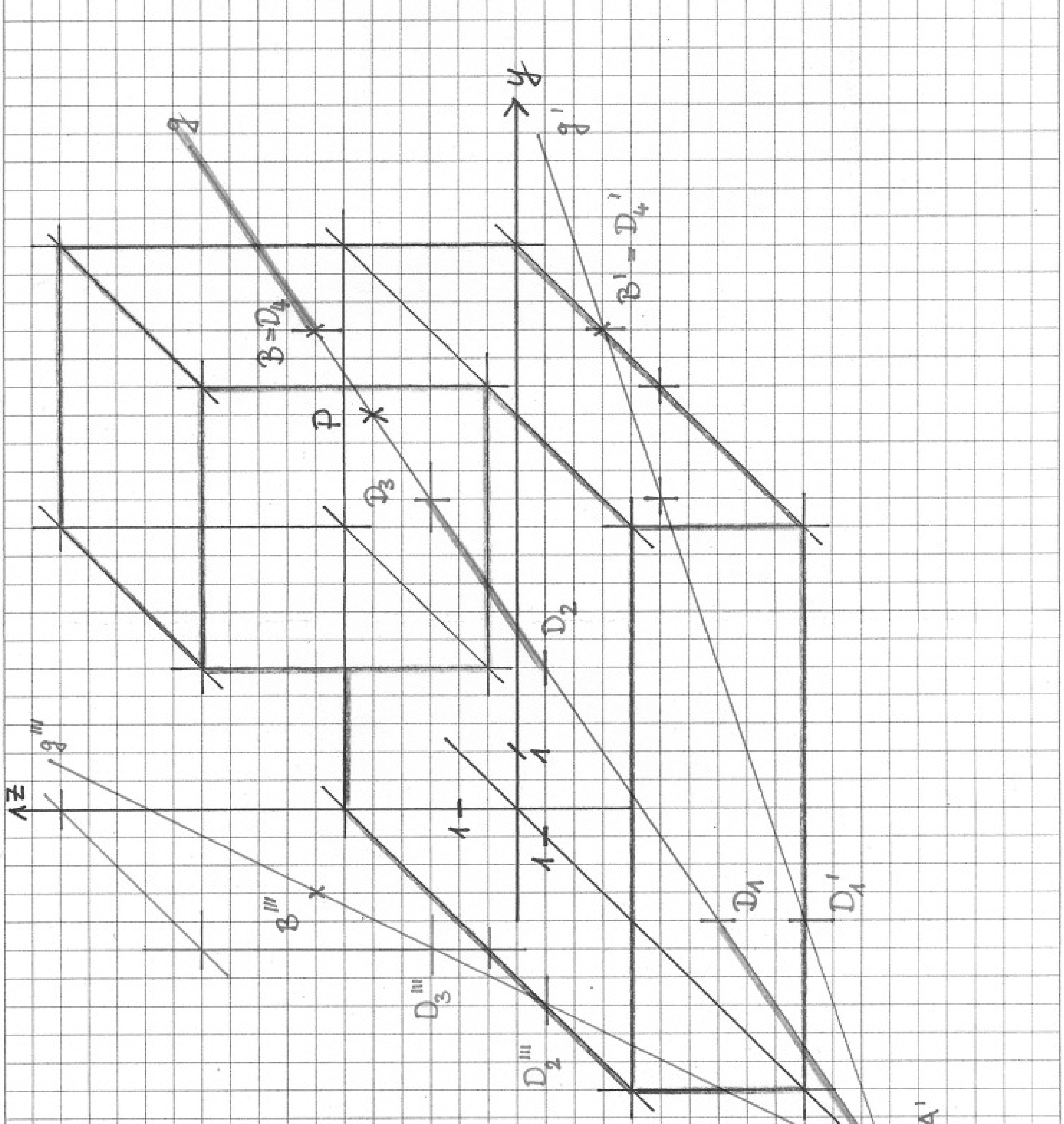
$\Rightarrow$ mit solver: $s = -0{,}644$

s in g einsetzen: $\Rightarrow Q(6{,}555/6{,}444/3{,}222)$

$$\overline{FQ} = \sqrt{(10-6{,}555)^2 + (10-6{,}444)^2 + (3-3{,}222)^2}$$
$$= 4{,}955$$

16 P.

Matur 2006
Mathematik



2 Wahrscheinlichkeitsrechnen

2.1

Karl: $p(\text{Bär}) = 80\%$, $p(\text{Hase}) = 5\%$, $p(\text{Rose}) = 15\%$

2.1.1 $p(3\times \text{Rose}) = 0{,}15^3 = \underline{\underline{0{,}3\,\%}}$ $(0{,}3375\,\%)$ 1 P.

2.1.2 $p(3\times \text{kein Bär}) = 0{,}2^3 = \underline{\underline{0{,}8\,\%}}$ 1 P.

2.1.3 $p(\text{kein Stofftier}) = p(\text{Rose}) = 0{,}15$

$p(3\times \text{kein Stofftier}) = 0{,}15^3$ 2 P.

$p(\text{mind. 1 Stofftier}) = 1 - 0{,}15^3 = \underline{\underline{99{,}7\,\%}}$ $(99{,}6625\,\%)$

6 P.

2.1.4 $p(\text{je } 1\times) = 0{,}8 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}15 \cdot \underset{\uparrow\ \text{Möglichkeiten}}{6} = \underline{\underline{3{,}6\,\%}}$ 2 P.

2.2

Karl: $p(\text{Bär}) = 80\%$, x Würfe
$p(\text{kein Bär}) = 20\%$

$1 - 0{,}2^x > 0{,}999$

↳ mit solver: $x = 4{,}292$

Variante: $0{,}2^x < 0{,}001$

oder Ausprobieren.

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{5 \text{ Würfe}}}$

3 P.

2.3

2.3.1 $A_{\square} = 25\,dm^2$, $A_{\sqsubset\!\sqsupset} = 5\,dm^2$

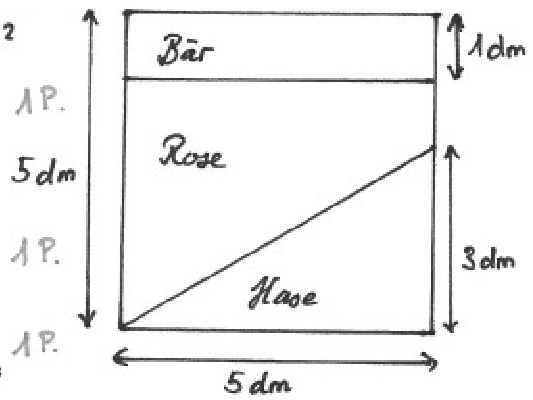
$\Rightarrow p(\text{Bär}) = \frac{5}{25} = \underline{\underline{20\%}}$ 1 P.

2.3.2 $A_{\triangle} = 7{,}5\,dm^2$

$\Rightarrow p(\text{Hase}) = \frac{7{,}5}{25} = \underline{\underline{30\%}}$ 1 P.

2.3.3 $p(\text{Rose}) = 1 - 0{,}2 - 0{,}3 = \underline{\underline{50\%}}$ 1 P.

(Variante: $A_{\text{Trapez}} = \frac{1+4}{2} \cdot 5 = 12{,}5\,dm^2$)



3 P.

2.4

3 Würfe $\rightarrow$ 6 Fr.   Bär $\rightarrow$ 3 Fr.
50 Kunden $\rightarrow$ 300 Fr.   Hase $\rightarrow$ 2 Fr.
150 Preise   Rose $\rightarrow$ 0,5 Fr.

2.4.1 Eric

$\underbrace{150\cdot 0{,}5}$ = 75 Rosen, $150\cdot 0{,}3$ = 30 Bären, $150\cdot 0{,}2$ = 45 Hasen 1

$\Rightarrow$ Kosten: $75\cdot 0{,}5 + 30\cdot 3 + 45\cdot 2 = 217{,}50$ Fr.

Einnahmen: $50\cdot 6 = 300{,}-$ Fr. 1 3P.

$\Rightarrow$ Gewinn: $300 - 217{,}50 = \underline{\underline{82{,}50 \text{ Fr.}}}$ 1

6P.

2.4.2 Karl

$150\cdot 0{,}15$ = 22,5 Rosen, $150\cdot 0{,}8$ = 120 Bären, $150\cdot 0{,}05$ = 7,5 Hasen 1

$\Rightarrow$ Kosten: $22{,}5\cdot 0{,}5 + 120\cdot 3 + 7{,}5\cdot 2 = 386{,}25$ Fr.

Einnahmen: 300,– Fr. 1 3P.

$\Rightarrow$ Gewinn: $300 - 386{,}25 = \underline{\underline{-86{,}25 \text{ Fr.}}}$

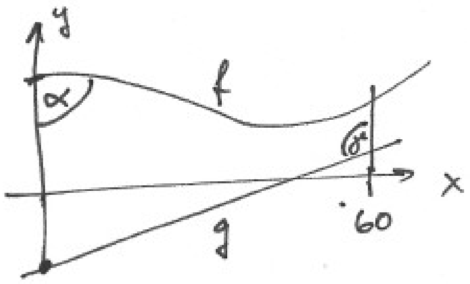
$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Verlust: } 86{,}25 \text{ Fr.}}}$ 1

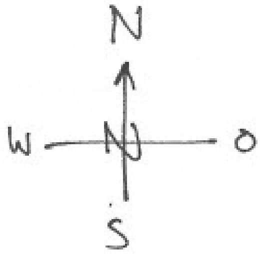
18P.

3 ~~Jakob Acher~~ Infinitesimalrechnung

Matur 2006
Mathematik

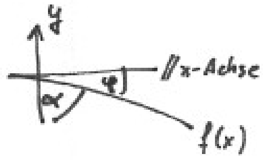
3.1





mit Lin Reg:

$g(x) = \frac{1}{2}x - 17$ 1P.



$f'(0) = -0{,}6 \overset{\text{mit } \tan^{-1}}{\Longrightarrow} \varphi = -30{,}964°$

$\alpha = 90° + \varphi = \underline{\underline{59{,}036°}}$ 2P.

5P.

$g'(60) = \frac{1}{2} \overset{\text{mit } \tan^{-1}}{\Longrightarrow} \varphi = 26{,}565°$

$\gamma = 90° + \varphi = \underline{\underline{116{,}565°}}$ 2P.

3.2 $\int_0^{60} (f(x) - g(x))\,dx = \underline{\underline{2424}}$ 2P.

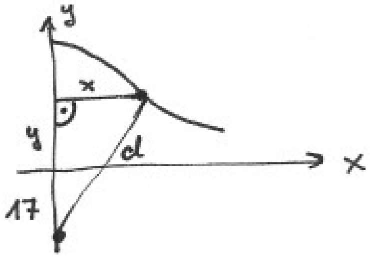
3.3 3.3.1 $\min_{0<x<60} (f(x) - g(x)) \Rightarrow$ mit minimum $\rightarrow$ $\underline{\underline{x = 46{,}481}}$

3P.

3.3.2 $\int_0^{x} [f(x) - g(x)]\,dx \overset{!}{=} 1212$ 6P.

mit solver: $\underline{\underline{x = 18{,}931}}$ 3P.

3.4



$d = \sqrt{x^2 + (y+17)^2}$; $y = f(x)$

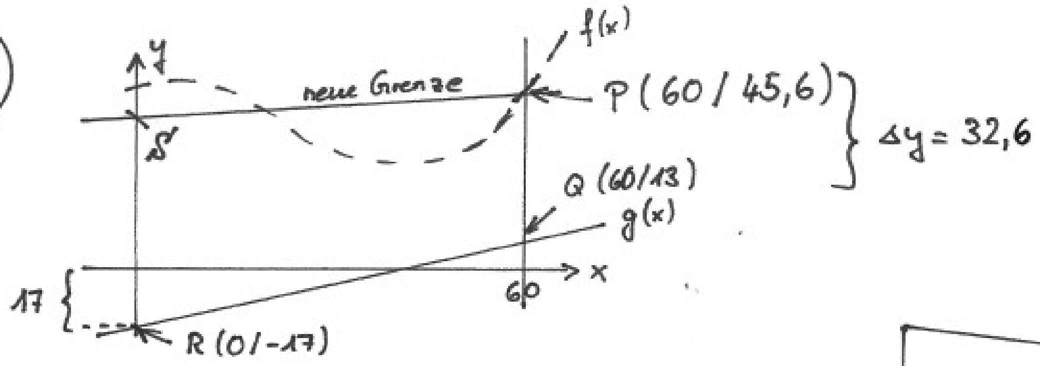
$d \rightarrow$ minimal

$\Rightarrow \underline{\underline{P(31{,}909 / 29{,}802)}}$

$\underline{\underline{d = 56{,}645}}$

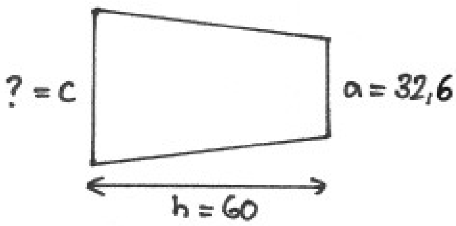
4P.

3.5



$A = \text{konstant} = 2424$

↳ jetzt ein Trapez!



$A_{\text{Trapez}} = m \cdot h \quad ; \quad h = 60$

3P.

$\Rightarrow \quad m = \frac{A}{h} = \frac{2424}{60} = 40{,}4$

$m = \frac{a + c}{2} \quad ; \quad a = 32{,}4$

$\Rightarrow \quad c = 2m - a = 2 \cdot 40{,}4 - 32{,}6 = 48{,}2$

$48{,}2 - 17 = 31{,}2$

$\Rightarrow \quad S(0 / 31{,}2)$

20 P.

Variante: $A_{\text{Trapez}} = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{32{,}6+c}{2} \cdot 60 = 2424$

$\Rightarrow \quad c = 48{,}2$

4 Folgen und Reihen

Matur 2006
Mathematik

4.1

$V_n = 4{,}2 \cdot 1{,}033^n \rightarrow$ G.F.: $V_0 = 4{,}2$, $q = 1{,}033$

$\underline{V_1 = 4{,}339 \text{ Mio t}}$ (4,3386) 1P.

$\underline{V_5 = 4{,}940 \text{ Mio t}}$ (4,940272...) 1P. 3P.

$\underline{V_{20} = 8{,}040 \text{ Mio t}}$ (8,0399939...) 1P.

4.2

$V_T = 8{,}4 = 4{,}2 \cdot 1{,}033^T$ → mit Listen: $\underline{T = 22 \text{ Jahre}}$

↳ mit solver: $\underline{T = 21{,}349 \text{ Jahre}}$ 1,5P.

4.3

$q = 1{,}033 \Rightarrow \underline{p = 3{,}3\,\%}$ 1P.

(oder: $\frac{V_1 - V_0}{V_0} = p$)

4.4

mit Listen und cumsum: $\underline{V_{1-40} = 350{,}307 \text{ Mio t}}$

(oder: $V_{1-40} = V_1 \cdot \frac{q^{40}-1}{q-1}$) 1,5P.

4.5

mit Listen und ausprobieren / suchen → $\underline{n = 60}$

oder: $V_{1-n} = V_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = 780$ 3P.

↳ mit solver: $\underline{n = 59{,}638 \text{ Jahre}}$ (59,637505...)

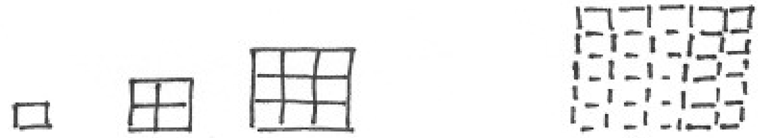
4.6

$\frac{780}{4{,}2} = \underline{185{,}714 \text{ Jahre}}$ 1P.

11 P.

5 Kurzprobleme

5.1



1^2	2^2	3^2	…	n^2
4	12	24		

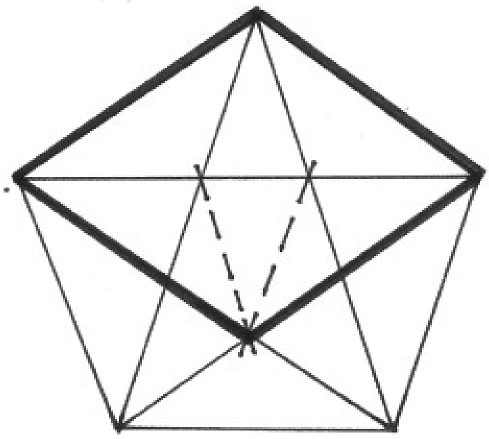
$$\left.\begin{array}{l} | \; n\cdot(n+1) \\ - \; n\cdot(n+1) \end{array}\right\} \; \underline{\underline{2n(n+1)}}$$

4P.

Kontrolle: $2\cdot1\cdot2$ ✓ ; $2\cdot2\cdot3$ ✓ ; $2\cdot3\cdot4$ ✓

Variante: $4 + 2(n-1)\cdot 3 + (n-1)^2\cdot 2$

5.2



Der Flächeninhalt des markierten Rhombuses kann auf zwei Arten berechnet werden:

① ▱ = ◇ + 2 · △ + 2 · △

② ▱ = 4 · △ + 2 · △

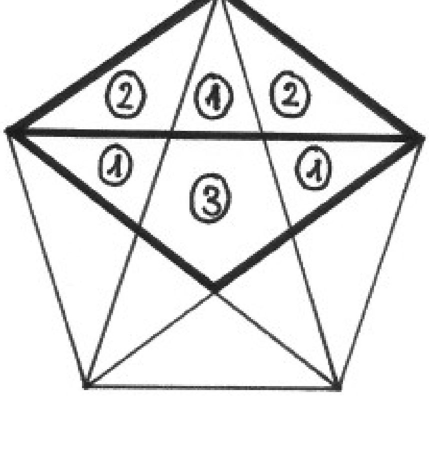
Aus ① = ② folgt:

◇ = 2 · △

4P.

8P.

Variante:



Der Rhombus kann in zwei kongruente Dreiecke unterteilt werden (△ und ▽). Weil alle Dreiecke ① und ② untereinander kongruent sind, folgt direkt:

2 · ② = ① + ③ = Drachen.