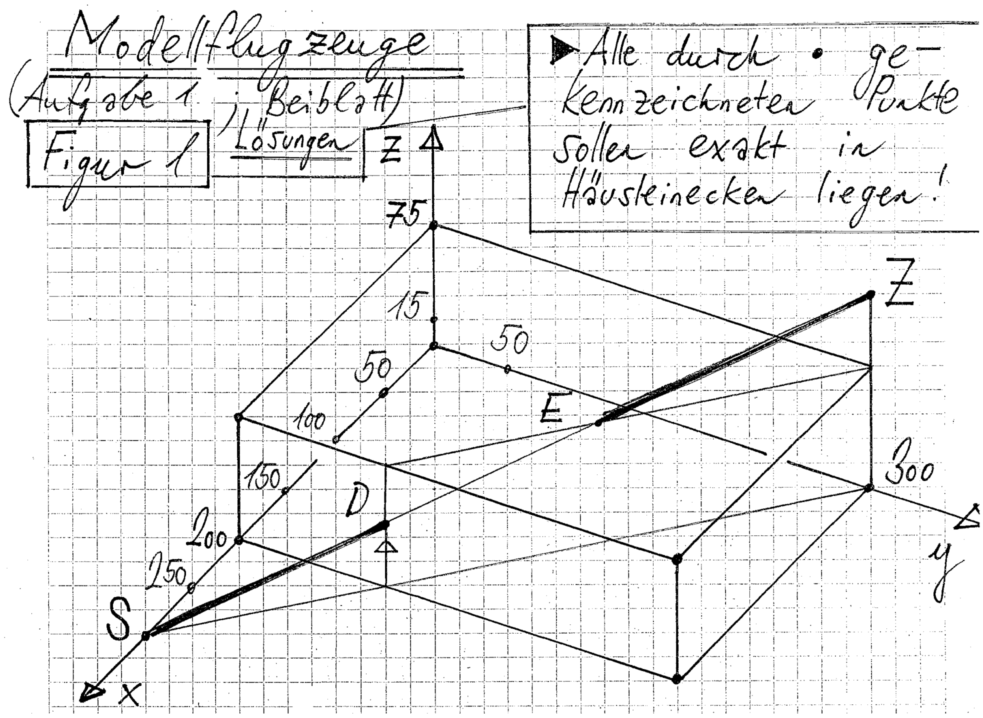
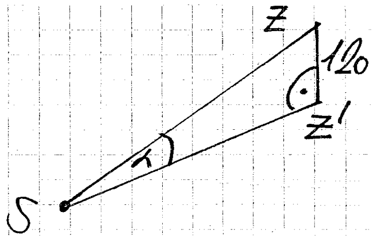
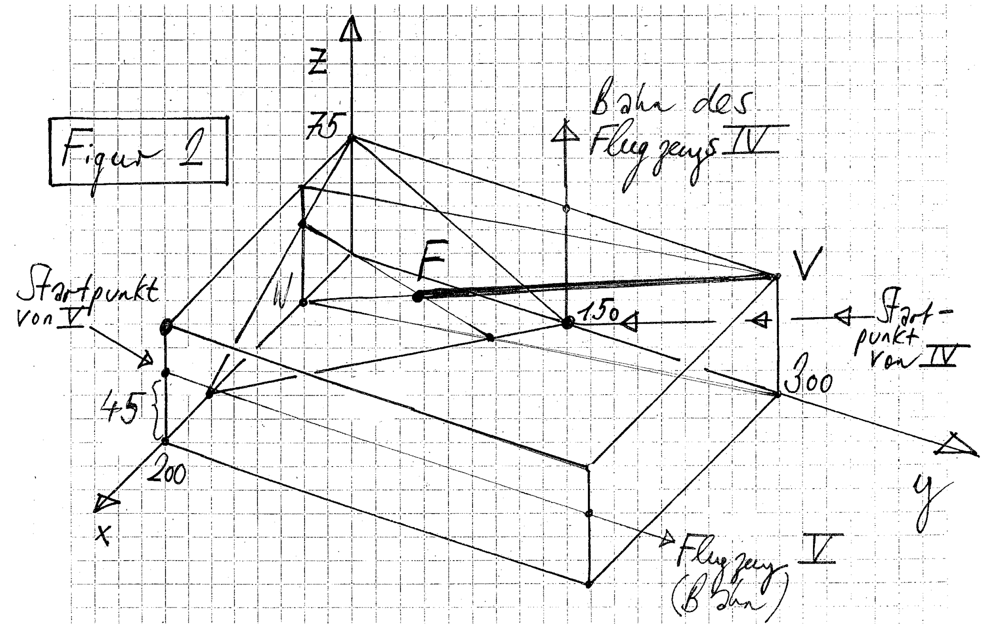
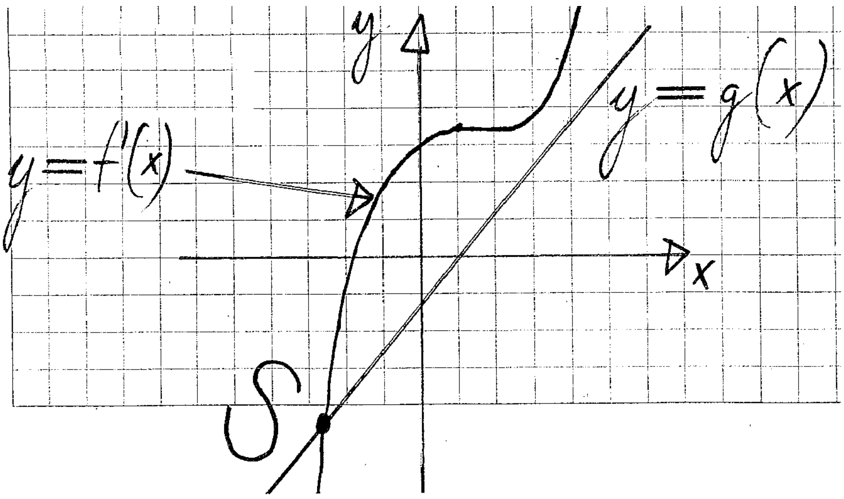
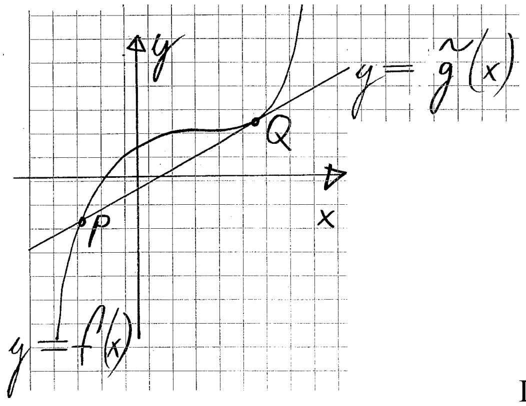
Aufgabe 1 Raumgeometrie: Modellflugzeuge		17 P.
1.1.1		2 P.
1.1.2	S(300/0/0), Z(0/300/120) $\Rightarrow$ $\overrightarrow{SZ} = \begin{pmatrix} -300 \\ 300 \\ 120 \end{pmatrix}$ Gerade durch S und Z: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -300 \\ 300 \\ 120 \end{pmatrix}$ *(z.B.)* Für Punkt D gilt x = 200 $\Rightarrow$ t = $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ D(200/100/40) Für Punkt E gilt z = 75 $\Rightarrow$ t = $\frac{5}{8}$ $\Rightarrow$ E(112.5/187.5/75) $\overline{DE} = \sqrt{(200-112.5)^2 + (100-187.5)^2 + (40-75)^2} = \sqrt{16'537.5} = \underline{\underline{128.598}}$	3 P.
1.1.3	 $\overline{SZ'} = \sqrt{300^2 + 300^2} = \sqrt{180'000} = 424.264$ $\tan\alpha = \frac{120}{\sqrt{180'000}} = 0.283 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 15.793°}}$ *Variante:* $\overline{SZ} = \sqrt{194'400} = 440.908 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{120}{\overline{SZ}} = 0.272 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 15.793°}}$	2 P.
1.1.4	Treffpunkt T teilt die Strecke $\overline{SZ}$ im Verhältnis 1 : 2 $\Rightarrow$ t = $\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ T = D $\Rightarrow$ $\underline{\text{T(200/100/40)}}$	2 P.

1.2		2 P.
1.3.1	Flugzeug IV: (0/150/3t) *oder* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ Flugzeug IV startet im Punkt (0/150/0) und bewegt sich parallel zur z-Achse. Flugzeug V: (200/6t/45) *oder* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 0 \\ 45 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ Flugzeug V startet im Punkt (200/0/45) und bewegt sich parallel zur y-Achse. Zeichnung siehe Figur 2 oben.	2 P.
1.3.2	Abstand = $\sqrt{(200-0)^2 + (6t-150)^2 + (45-3t)^2} \quad \rightarrow$ minimieren! Abstand wird minimal bei $\underline{\underline{t = 23}}$. *(Kleinster Abstand ist 201.792)* Die Flugzeuge besitzen dabei die Positionen: Flugzeug IV: (0/150/69), Flugzeug V: (200/138/45)	4 P.

Aufgabe 2 Differenzieren		13 P.
2.1	• Zu f' passt nur Graph C. *(1 P.)* • Zu g' passen die Graphen B und F. *(2 P.)* • Graph A passt nicht, weil … *(1 P.)* … z.B. die Ableitung von A für grosse x-Werte gegen Null strebt, während f' gegen 1 und g' gegen $-\infty$ strebt. … oder A' von -1 ungefähr -1 ist, jedoch sicher nicht $0 = f'(-1)$ oder $3 = g'(-1)$. • Graph D passt nicht, weil … *(1 P.)* … z.B. die Ableitung von D bei x = 0 stetig ist (im Gegensatz zu f') und einen negativen Wert beträgt ($g'(0)$ ist positiv). … oder die Werte der Ableitungen bei x = 4 nicht übereinstimmen: $A'(4) \approx 2,\ f'(4) \approx 0.9,\ g'(4) = -2$. • Graph E passt nicht, weil … *(1 P.)* … z.B. die Ableitung von E zwischen x = –5 und x = –2 zunimmt, was f' und g' beide nicht tun. … oder die Ableitung von E für grosse x-Werte gegen Null strebt, was f' und g' beide nicht tun.	6 P.
2.2.1	 *(1 P.)* Die Lösung von f(x) = g(x) ist die x-Koordinate von S, dem Schnittpunkt der Kurven f und g. Mit intersect findet man <u>x = –3.232.</u> *(0.5 P.)* <u>Wichtig:</u> f ist eine Parabel dritten Grades, d.h. sie wird links und rechts immer steiler, die Gerade g hingegen besitzt eine konstante Steigung. Das bedeutet, dass S der einzige Schnittpunkt zwischen f und g ist. Demnach hat auch die Gleichung f(x) = g(x) nur eine einzige Lösung, nämlich die oben genannte. *(1 P.)*	2.5 P.

<table>
<tr>
<td>2.2.2</td>
<td>



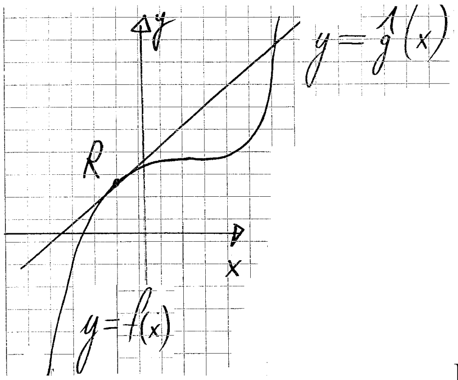
Dabei ist $\tilde{g}(x) = 2x - 1.5$.

Es ist nachzuweisen, dass sich die Graphen von f und $\tilde{g}$ in Q <u>berühren</u>.*(1 P.)*

Auf Grund der Figur vermutet man, dass Q = (3/…) ist. Nachrechnen ergibt $f(3) = 4.5$ und $\tilde{g}(3) = 4.5$ *(also ist Q Schnittpunkt)* sowie $f'(3) = 2$ und $\tilde{g}' = 2$, womit die Behauptung bewiesen ist. *(1 P.)*

<u>*Variante:*</u>
Der Schnittpunkt Q kann auch mit dem Taschenrechner bestimmt werden. Es bleibt mit Hilfe der Ableitungen zu zeigen, dass er gleichzeitig Berührpunkt ist.

</td>
<td>2 P.</td>
</tr>
<tr>
<td>2.2.3</td>
<td>



Dabei ist $\hat{g}(x) = 2x + p$.

Hier muss die Gerade $\hat{g}$ die Kurve f in einem noch zu bestimmenden Punkt R(r/?) berühren. $f'(r)$ muss 2 sein. Die Gleichung $f'(x) = 2$ hat die Lösungen $x = -1$ und $x = 3$ *(mit intersect oder solver),* wobei die Lösung $x = 3$ bereits in der vorherigen Teilaufgabe abgehandelt wurde. *(1 P.)*

Also ist $R = (-1/f(-1)) = (-1/\frac{11}{6})$.

Es gilt nun $f(-1) = \hat{g}(-1) = \frac{11}{6}$.

$\Rightarrow 2 \cdot (-1) + p = \frac{11}{6} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{p = \frac{23}{6} = 3\frac{5}{6} = 3.833}}$ *(1.5 P.)*

</td>
<td>2.5 P.</td>
</tr>
<tr>
<td>XXX</td>
<td>

<u>Anmerkung:</u> Für die Lösung dieser Aufgabe sind die Terme der Funktionen nicht wichtig. Übungshalber sind sie hier festgehalten:

$A(x) = 1 + \frac{1}{x}$, $E(x) = \frac{2}{3}x^{-3} - 2x^{-1}$,
$B(x) = -0.5x^2 + 2x - 1$, $F(x) = -0.5x^2 + 2x$,
$C(x) = x + \frac{1}{x}$, $f'(x) = 1 - x^{-2}$,
$D(x) = 0.5x^2 - 2x$, $g'(x) = -x + 2$.

</td>
<td>XXX</td>
</tr>
</table>

Aufgabe 3 Folgen und Reihen: Sitzplätze und Gummiball — 8 P.

3.1.1 — 1 P.

Arithmetische Folge mit $a_1 = 80$ und $d = 5$.
$\Rightarrow\ a_{25} = a_1 + (n - 1) \cdot d = 80 + 24 \cdot 5 = \underline{\underline{200}}$

Variante:
Mit Listen und Ablesen, z.B.:

L1 Reihennummer	L2 Sitzplätze	L3 Summe
1	80	80
2	85	165
3	90	255
⋮	⋮	⋮
25	200	3500
⋮	⋮	⋮
31	230	4805
32	235	5040
⋮	⋮	⋮

mögliche Befehle:

seq(X,X,1,50,1) → L1
seq(X,X,80,80+49*5,5) → L2
cumsum(L2) → L3 *(wird für Aufgabe 3.1.3 benötigt)*

3.1.2 — 1 P.

$a_n = a_1 \cdot (n - 1) \cdot d = \underline{\underline{80 + (n - 1) \cdot 5}} = \underline{\underline{75 + 5n}}$

3.1.3 — 2 P.

Arithmetische Reihe mit $a_1 = 80$ und $d = 5$.
$s_n = a_1 n + n(n + 1)/2 \cdot d$
$5000 = 80n + 2.5n\,(n - 1) \quad \Rightarrow \quad 0 = 2.5n^2 + 77.5n - 5000$
$\Rightarrow\ n = 31.831$ (*mit Mitternachtsformel oder TR*)
$\Rightarrow$ Insgesamt hätte man 32 Reihen bauen müssen, also noch 7 zusätzlich.

Variante:
Mit Listen, cumsum und Ablesen (siehe 3.1.1.)

3.2.1 — 1 P.

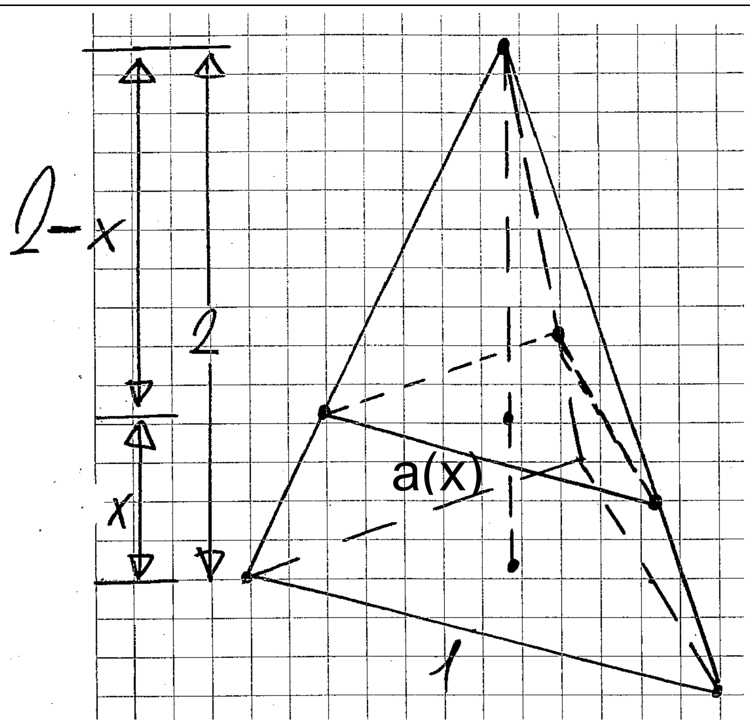
Sprunghöhe ist geometrische Folge mit $a_1 = 0.85$ und $q = 0.85$.
$\Rightarrow\ a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \Rightarrow \quad 0.20 = 0.85 \cdot 0.85^{n-1} \quad \Rightarrow \quad n = 9.903$
Also nach 10 Bodenkontakten.
Dabei springt der Ball $0.85 \cdot 0.85^9 = 0.197$ m = 19.7 cm hoch.

Varianten:
1) Mit Ausprobieren
2) Mit Listen und Ablesen, z.B.:

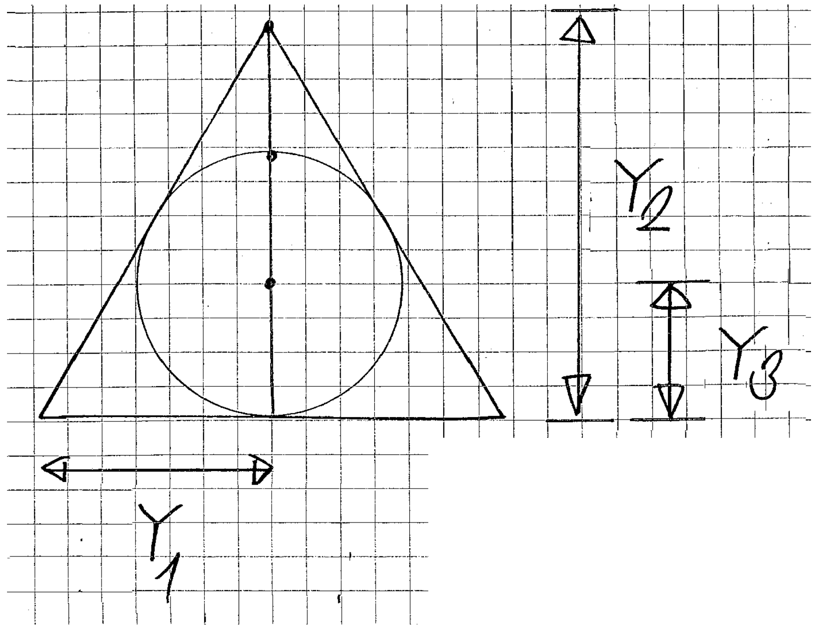
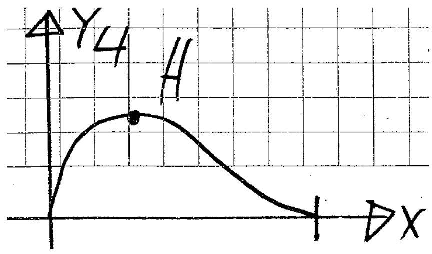
L1 Bodenberührung	L2 Sprunghöhe	L3 Summe
1	0.85	0.85
2	0.7225	1.5725
3	0.61413	2.1866
4	0.52201	2.7086
⋮	⋮	⋮

<table>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td>9</td><td>0.23162</td><td>4.3542</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0.19687</td><td>4.551</td></tr>
<tr><td>⋮</td><td>⋮</td><td>⋮</td></tr>
<tr><td>500</td><td>5E–36</td><td>5.6667</td></tr>
</table>
mögliche Befehle:
seq(X,X,1,500,1) → L1
seq(0.85^X,X,1,500,1) → L2
cumsum(L2) → L3 (wird für die Aufgaben 3.1.2 und 3.1.3 benötigt)
</td><td></td></tr>
<tr><td>3.2.2</td><td>Gesamtweg = Erster Fall + viermal rauf + viermal runter
$1 + 2 \cdot 0.85 + 2 \cdot 0.85^2 + 2 \cdot 0.85^3 + 2 \cdot 0.85^4 = \underline{\underline{6.417\text{ m}}}$

<u>Variante:</u>
basierend auf Listen: $1 + 2 \cdot 2.7086 = 6.417$ m</td><td>2 P.</td></tr>
<tr><td>3.2.3</td><td>Mit Hilfe der unendlichen geometrischen Reihe s:
Gesamtweg = $1 + 2 \cdot s$.
Dabei ist $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{0.85}{1-0.85} = 5.666$ (oder aus Listen ablesen)
$\Rightarrow$ Gesamtweg = $\underline{\underline{12.333\text{ m}}}$</td><td>1 P.</td></tr>
</table>

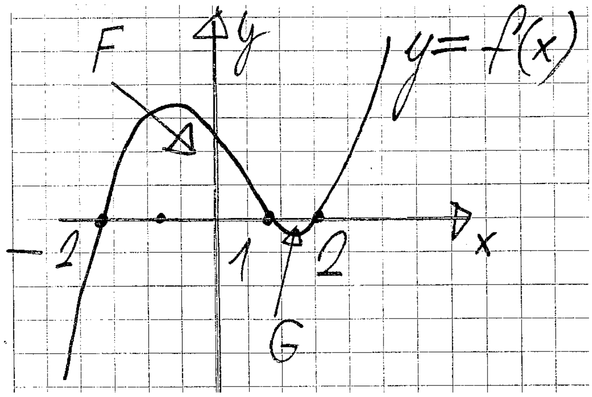
<table>
<tr><td colspan="2">Aufgabe 4 Extremalaufgabe: Zylinder in Pyramide</td><td>9 P.</td></tr>
<tr><td>4.1</td><td>


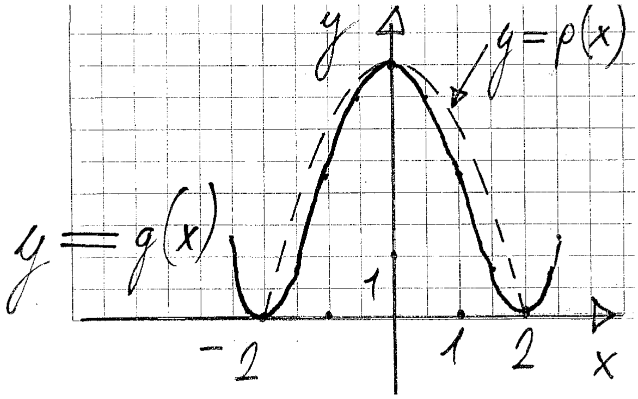
Die obere Pyramide entsteht aus der ganzen Pyramide durch ähnliche Verkleinerung (auch zentrische Streckung genannt).
Verhältnis Dreiecksseite zu Höhe ergibt:
$\frac{a(x)}{1} = \frac{2-x}{2} \quad \Rightarrow \quad a(x) = \frac{2-x}{2} = 1 - \frac{x}{2}$
</td><td>3 P.</td></tr>
</table>

4.2	 halbe Dreiecksseite: $Y_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(a(x)\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)$ Höhe im gleichseitigen Dreieck: $Y_2 = \sqrt{3}\cdot Y_1 = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)$ Radius des Kreises (Zylinder): $Y_3 = \frac{1}{3}\cdot Y_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)$ Volumen des Zylinders: $\underline{\underline{Y_4 = \pi\cdot {Y_3}^2\cdot x = \frac{\pi}{12}\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)^2\cdot x}}$	4 P.
4.3	 Die Volumenfunktion Y_4 hat Hochpunkt H($\frac{2}{3}$ /0.078) *(mit maximum)*. Das Volumen wird somit maximal für $\underline{\underline{x = \frac{2}{3}}}$ und hat dann den Wert <u>0.078</u>.	2 P.

Aufgabe 5 Anzahlen und Wahrscheinlichkeiten: Schere – Stein – Papier		15 P.
5.1.1	Pro Zeile sind $3 \cdot 3 = 9$ Resultate denkbar; 10 verschiedene Zeilen sind somit <u>unmöglich</u>.	2 P.
5.1.2	a) Pro Zeile existieren 9 mögliche Resultate $\Rightarrow$ In 10 Zeilen $\underline{\underline{9^{10} = 3'486'784'401}}$ mögliche Spielverläufe. b) Pro Zeile bleiben 3 Möglichkeiten $\Rightarrow$ $\underline{\underline{3^{10} = 59'049}}$ mögl. Spielverläufe	2 P.
5.1.3	<table><tr><th>Klein_ida gewinnt … Runden</th><th>Lizzy kann … Runden gewinnen</th></tr><tr><td>10</td><td>0</td></tr><tr><td>9</td><td>0 , 1</td></tr><tr><td>8</td><td>0 , 1 , 2</td></tr><tr><td>7</td><td>0 , 1 , 2 , 3</td></tr><tr><td>⋮</td><td>⋮</td></tr><tr><td>1</td><td>0 , 1 , 2 , 3 , … , 9</td></tr><tr><td>0</td><td>0 , 1 , 2 , 3 , … , 9 , 10</td></tr></table> Totale Anzahl der Möglichkeiten: $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 + 11 = \underline{\underline{66}}$	2 P.
5.2.1	Alle 9 Resultate aus 5.1.1 sind gleich wahrscheinlich. Bei drei davon gewinnt Klein-Ida, drei sind unentschieden, dreimal verliert Klein-Ida. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{P(Klein-Ida gewinnt)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}}}$; $\underline{\underline{\text{P(unentschieden)} = \frac{1}{3}}}$	2 P.
5.2.2	Klein-Ida: P(Ida Papier) = 0.2, P(Ida Stein) = 0.4, P(Ida Schere) = 0.4 Lizzy: P(Liz Papier) = 0.5, P(Liz Stein) = 0.25, P(Liz Schere) = 0.25 P(Klein-Ida gewinnt) = P(Ida Papier) · P(Liz Stein) + P(Ida Stein) · P(Liz Schere) + P(Ida Schere) · P(Liz Papier) $= 0.2 \cdot 0.25 + 0.4 \cdot 0.25 + 0.4 \cdot 0.5 = \underline{\underline{0.35}}$ P(Lizzy gewinnt) = P(Liz Papier) · P(Ida Stein) + P(Liz Stein) · P(Ida Schere) + P(Liz Schere) · P(Ida Papier) $= 0.5 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.4 + 0.25 \cdot 0.2 = \underline{\underline{0.35}}$	3 P.
5.3	<table><tr><th>A</th><th>B</th></tr><tr><td>Stein</td><td>Stein</td></tr><tr><td>Schere</td><td>Papier</td></tr><tr><td>Stein</td><td>Papier</td></tr></table> Falls Klein-Ida Spielerin A und Lizzy Spielerin B ist, entsteht das notierte Spielresultat mit folgender Wahrscheinlichkeit: P(Ida Stein) · P(Liz Stein) · P(Ida Schere) · P(Liz Papier) · P(Ida Stein) · P(Liz Papier) $= 0.4 \cdot 0.25 \cdot 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.4 \cdot 0.5 = 0.004$. *(„UND“-Ereignisse; auch mit Baumdiagramm lösbar)*	4 P.

	Ist es umgekehrt, also Lizzy A und Klein-Ida B, entsteht das notierte Spielresultat mit der Wahrscheinlichkeit: P(Liz Stein) · P(Ida Stein) · P(Liz Schere) · P(Ida Papier) · P(Liz Stein) · P(Ida Papier) = 0.25 · 0.4 · 0.25 · 0.2 · 0.25 · 0.2 = 0.00025 Das notierte Spielresultat entsteht also mit einer Wahrscheinlichkeit von insgesamt 0.00425 (= 100 %), mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.004 ist Klein-Ida Person A. Somit steht Klein-Ida in der Tabelle mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{0.004}{0.00425} = \underline{\underline{94.1\ \%}}$ links. *(Stichwort: Bedingte Wahrscheinlichkeit)*	

Aufgabe 6 Integralrechnung		13 P.
6.1	Skizze des Graphen f:  Nullstellen bestimmen *mit zero* (oder *table*): $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. $F = \int_{-2}^{1} f(x)dx = 11.25$ *(mit* $\int$*f(x)dx* oder *fnInt)* $G = \int_{1}^{2} f(x)dx = -0.583$ *(mit* $\int$*f(x)dx* oder *fnInt)* $A = F + \lvert G \rvert = 11.25 + 0.583 = \underline{\underline{11.833}}$	4 P.
6.2	$V = \int_{-2}^{2} \pi \cdot (f(x))^2 dx = \underline{\underline{168.509}}$ *(mit fnInt)*	1.5 P.
6.3	Bedingung: $\int_{-2}^{x} f(t)dt = 0.5 \cdot F = 5.625$ Lösung *mit solver* und *fnInt*: $\underline{\underline{x = -0.717}}$	2 P.

6.4	Exakte Zeichnung des Graphen g (*mit table*; x = –2 und 2 sind Nullstellen):  $\int_{-2}^{2} g(x)dx$: Für die Keplersche Fassregel benötigt man die Punkte $P_0(-2/0)$ und $P_2(2/0)$; der mittlere Punkt ist $P_m(0/4)$: $K = \frac{2-(-2)}{6}\cdot(0+4\cdot g(0)+0) = \frac{4}{6}\cdot(4\cdot 4) = \underline{\underline{10.667}}$ Exakter Wert: I = $\underline{\underline{8.533}}$ *(mit ∫f(x)dx* oder *fnInt)*	3 P.
6.5	Skizze der Parabel: siehe Aufgabe 6.4 (gestrichelt) Gleichung der Parabel: Aus den Punkten (–2/0), (0/4) und (2/0) *mit QuadReg*: $\underline{\underline{p(x) = -x^2 + 4}}$ (*zur* Kontrolle*:* $\int_{-2}^{2} p(x)dx = 10.667$) Begründung für die Abweichung: In der Zeichnung ist deutlich zu sehen, dass zwischen x = –2 und 2 (den Integrationsgrenzen) die Parabel p immer höher/weiter oben liegt als die Kurve g. Somit ist die Fläche, die die Parabel mit der x-Achse einschliesst, grösser als diejenige, die die Kurve g mit der x-Achse einschliesst; und damit gilt dasselbe auch für die zugehörigen Integrale.	2.5 P.