Aufgabe 1 Raumgeometrie — 15 P.

a) — 1.5 P.

$$k = \overline{CS} = \left|\overrightarrow{CS}\right|$$

$$\overrightarrow{CS} = \begin{pmatrix} 0+3 \\ 0-4 \\ 9-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$ *(0.5 P.)*

$$\overline{CS} = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 7^2} = \sqrt{74} = 8.602325... \approx \underline{\underline{8.60}}$$ *(1 P.)*

<u>Variante:</u>
Direkt in Distanzformel einsetzen.

b) — 3 P.

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3-3 \\ 4+4 \\ 10-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \textit{(z.B.)}$$ *(1 P.)*

Boden der Pyramide: $z = 2$ *(0.5 P.)*
z in g: $2 = 0 + 10s \Rightarrow s = \frac{1}{5} = 0.2$ *(0.5 P.)*

s in g einsetzen:
$x = 3 + 0.2 \cdot (-6) = 1.8$
$y = -4 + 0.2 \cdot 8 = -2.4$ *(0.5 P.)*

$\Rightarrow \underline{\underline{S(1.8/-2.4/2)}}$ *(0.5 P.)*

c) — 4 P.

$$k: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \textit{(z.B.)}$$ *(0.5 P.)*

g und k gleichsetzen:

$$\left| \begin{array}{rcrcrcr} 3 & - & 6s & = & -3 & + & 3t \\ -4 & + & 8s & = & 4 & - & 4t \\ 0 & + & 10s & = & 2 & + & 7t \end{array} \right|$$ *(0.5 P.)*

Umformen:

$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \\ \text{III.} \end{array} \left| \begin{array}{rcrcr} -6s & = & -6 & + & 3t \\ 8s & = & 8 & - & 4t \\ 10s & = & 2 & + & 7t \end{array} \right| \quad \textit{(z.B.)}$$ *(0.5 P.)*

Benutze z.B. Gleichungen II. und III.
(Beachte: I. und II. sind Vielfache voneinander, weil g' = k' ist.)

$$\begin{array}{l} 7 \cdot \text{II.} \\ 4 \cdot \text{III.} \end{array} \left| \begin{array}{rcrcr} 56s & = & 56 & - & 28t \\ 40s & = & 8 & + & 28t \end{array} \right| \oplus$$

$$96s = 64$$

$\Rightarrow \quad s = \frac{2}{3}$ *(0.5 P.)*

	in III. $t=\frac{10s-2}{7}=\frac{2}{3}$ *(0.5 P.)* Kontrolle in I: $3-6\cdot\frac{2}{3}=-1=-3+3\cdot\frac{2}{3}\Rightarrow$ stimmt! *(0.5 P.)* s in g: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}-6\\8\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\\frac{4}{3}\\\frac{20}{3}\end{pmatrix}$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow\ \underline{\underline{Q(-1/\frac{4}{3}/\frac{20}{3})}}$ *(0.5 P.)* <u>Variante der Kontrolle:</u> Parameter s in g und t in k einsetzen und überprüfen, ob beide Q identisch sind.	
d)	$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{CS}\cdot\overrightarrow{AB}}{\lvert\overrightarrow{CS}\rvert\cdot\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}=\frac{\begin{pmatrix}3\\-4\\7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-6\\8\\10\end{pmatrix}}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{(-6)^2+8^2+10^2}}$ $=\frac{-18-32+70}{\sqrt{74}\cdot\sqrt{200}}=\frac{20}{\sqrt{14800}}=0.164398\ldots$ $\Rightarrow\ \varphi=80.537677\ldots\approx\underline{\underline{80.54°}}$ *(Bewertung: Formel /* $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert$ */ Skalarprodukt / cos φ / φ je 0.5 P.)*	2.5 P.
e)	$h:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-6\\8\\10\end{pmatrix}$ *(z.B.)*	1 P.
f)	$\overline{hg}=\overline{Sg}$ *(0.5 P.)* $\overrightarrow{Sg}=\begin{pmatrix}3-6s-0\\-4+8s-0\\0+10s-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-6s\\-4+8s\\-9+10s\end{pmatrix}$ *(0.5 P.)* $\overline{Sg}=\sqrt{(3-6s)^2+(-4+8s)^2+(-9+10s)^2}$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ minimalisieren mit *minimum* *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ $x=s=0.7$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ $y=\overline{Sg}=\overline{hg}=\sqrt{8}=2.828427\ldots\approx\underline{\underline{2.83}}$ *(0.5 P.)* <u>Variante mit Skalarprodukt:</u> $\overrightarrow{Sg}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ mit $\overrightarrow{AB}$ dem Richtungsvektor von g. Einsetzen: (3 – 6s) · (–6) + (–4 + 8s) · 8 + (–9 + 10s) · 10 = 0 Es folgt s = 0.7. In Vektor $\overrightarrow{Sg}$ einsetzen und seinen Betrag ausrechnen.	3 P.

Aufgabe 2 Analysis — 17 P.

a)

i) Nullstellen

Vermutung aufgrund des Graphen: $x_1 = -2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2$.

Überprüfen der Vermutung durch Einsetzen in die Funktionsgleichung:

$f(-2) = -2\cdot(-2)^3 + 8\cdot(-2) = 16 - 16 = \underline{\underline{0}}$

$f(0) = -2\cdot 0^3 + 8\cdot 0 = 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$ *(1 P.)*

$f(2) = -2\cdot 2^3 + 8\cdot 2 = -16 + 16 = \underline{\underline{0}}$

Variante:

$f(x) = 0 \quad\Rightarrow\quad -2x^3 + 8x = -2x\cdot(x^2-4) = 0$

$\Rightarrow\quad \underline{\underline{x = 0}}$ oder $(x^2-4) = 0$, also $x^2 = 4$, also $\underline{\underline{x = \pm 2}}$

ii) Tangente t

Wendepunkt ist W(0/0). *(0.5 P.)*

Begründung: Jede Polynomfunktion 3. Grades besitzt genau einen Wendepunkt. Zudem ist f punktsymmetrisch zum Ursprung, da in der Funktionsgleichung nur ungerade Exponenten auftauchen. *(0.5 P.)*
Oder: $f''(x) = -12x = 0 \quad\Rightarrow\quad x = 0 \quad\Rightarrow\quad y = 0$.
Oder: Extremstelle von $f'(x)$ ist $x = 0 \Rightarrow\ y = 0$.

Tangentensteigung: $f'(x) = -6x^2 + 8$ *(0.5 P.)*
$f'(0) = -6\cdot 0^2 + 8 = 8$ (oder mit *dy/dx*) *(0.5 P.)*

Tangentengleichung: $\underline{\underline{t\colon y = 8x}}$ (oder mit *DRAW Tangent*) *(0.5 P.)*

Zeichnung von t im Koordinatensystem
(durch W(0/0) und z.B. P(1/8)) *(0.5 P.)*

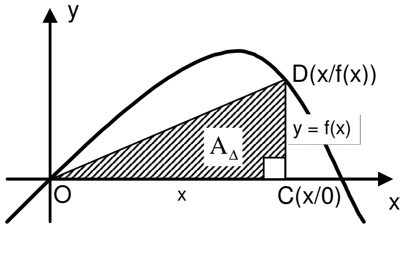
iii) Fläche A

$A_1 = \int_0^2 f(x)\,dx = 8$ (mit *fnInt* oder *∫f(x)dx* oder von Hand)

Wegen Symmetrie: $A = 2\cdot A_1 = \underline{\underline{16}}$ *(1 P.)*

5 P.

b)



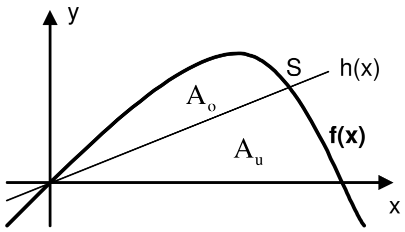
$A_\Delta(x) = \dfrac{x\cdot f(x)}{2} = -x^4 + 4x^2$ *(1 P.)*

$\Rightarrow$ maximieren mit *maximum* im Intervall $0 < x < 2$ *(1 P.)*

$\Rightarrow\quad \underline{\underline{x =}}\, 1.414213\ldots = \sqrt{2} \approx \underline{\underline{1.41}},\quad y = \underline{\underline{A_{\Delta\,max} = 4}}$ *(1 P.)*

3 P.

c)



Schnittpunkt von h und f mit *intersect*:
$S(1.73/3.46) = S(\sqrt{3}\,/\,2\sqrt{3})$ *(1 P.)*

$$A_o = \int_0^{\sqrt{3}} \big(f(x) - h(x)\big)dx = 4.5$$ (mit *fnInt* oder *∫f(x)dx* oder von Hand) *(1 P.)*

$$A_u = A_1 - A_o = 8 - 4.5 = 3.5$$ *(0.5 P.)*

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A_o : A_u = 9 : 7}}$$ *(0.5 P.)*

3 P.

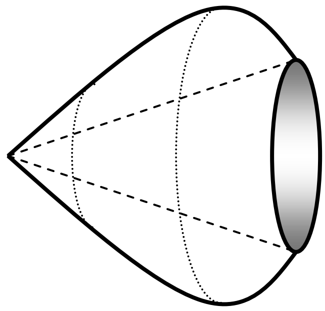
d)

$$V_{rot} = \pi \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \big(f(x)\big)^2\,dx - \pi \cdot \int_0^{\sqrt{3}} \big(h(x)\big)^2\,dx$$ *(1.5 P.)*

$$= 118.7779\ldots - 21.7655\ldots = 97.012354\ldots \approx \underline{\underline{97.01}}$$

(mit *fnInt* oder *∫f(x)dx* oder von Hand)

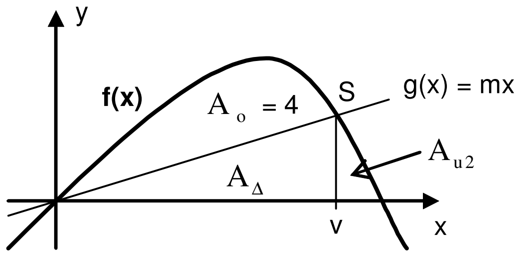
Skizze des Rotationskörpers:



(1 P.)

2.5 P.

e)



g halbiert A_1, also gilt: $A_o = A_u = A_1 : 2 = 4$

Ansatz: $A_u = A_\Delta + A_{u2} = 4$ *(0.5 P.)*

$$A_u(v) = \frac{v \cdot f(v)}{2} + \int_v^2 f(t)\,dt = 4$$ *(1 P.)*

Mit *intersect* oder *solver* (im TR allenfalls v durch x ersetzen) oder von Hand:
v = 1.681792831… *(0.5 P.)*

$$\Rightarrow \quad S\big(v\,/\,f(v)\big) = S(1.681792831\ldots/3.940685724\ldots)$$ *(0.5 P.)*

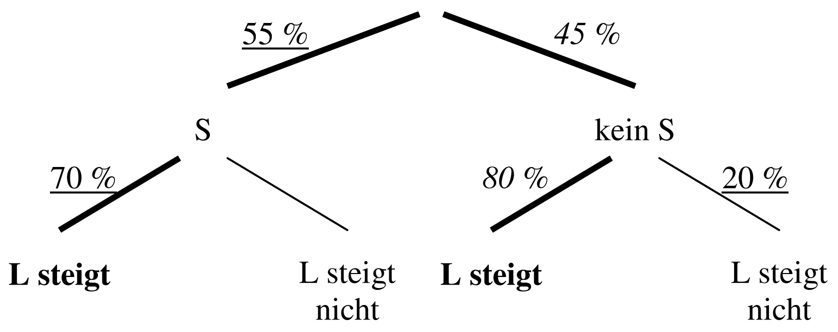
$$\Rightarrow \quad m = \frac{f(v)}{v} = 2.343145751\ldots \approx 2.34$$ *(0.5 P.)*

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{g:\ y \approx 2.34x}}$$ (oder mit *LinReg* mit den Punkten O und S) *(0.5 P.)*

3.5 P.

	Variante: Ansatz: $A_o = \int_0^v (f(x) - g(x))dx = \int_0^v (f(x) - mx)dx = 4$. *(0.5 P.)* Mit S(v/f(v)) folgt $m = \frac{f(v)}{v} = \frac{-2v^3 + 8v}{v} = -2v^2 + 8$. *(1 P.)* Einsetzen ergibt: $\int_0^v (f(x) - (-2v^2 + 8) \cdot x)dx = 4$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ v = 1.681792831… = $\sqrt[4]{8}$ mit *solver* oder von Hand *(1 P.)* $\Rightarrow$ m = 2.343145751… $\Rightarrow$ $\underline{\underline{g: \ y \approx 2.34x}}$ *(0.5 P.)*	

Aufgabe 3 Wahrscheinlichkeitsrechnung		14 P.
a)	4 N, 3 M, 2 H $\Rightarrow$ 9 Gläser für 9 Tische Permutation (geordnete Stichprobe) mit Wiederholungen: $\frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = \underline{\underline{1260}}$	1.5 P.
b)	$P(M) = \frac{3}{9} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}} = \underline{\underline{33.3\%}}$ (3 von 9 Gläsern; 1. Tag spielt keine Rolle.)	1.5 P.
c)	$m = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = 126$ (4 von 9 Gläsern, ungeordnete Stichprobe) $g = \binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2!} = 21$ (2 von 7 Nicht-H-Gläsern, 2 H fix, ungeord. Stichpr.) $\Rightarrow \frac{g}{m} = \frac{21}{126} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}} = \underline{\underline{16.67\%}}$ Variante: (nacheinander 4 Gläser ziehen ohne Zurückstellen) $P(2H + 2 \text{ andere}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{7}{7} \cdot \frac{6}{6} \cdot \underbrace{\frac{4!}{2! \cdot 2!}}_{\text{6 Pfade}} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}} = \underline{\underline{16.67\%}}$	2 P.
d)	P(S) = P(kein S) = 0.5 P (mind. 1S) = P(1S) + P(2S) = 0.5 · 0.5 · 2 + 0.5 · 0.5 = $\underline{\underline{0.75}}$ = $\underline{\underline{75\ \%}}$. Variante: (mit Gegenereignis) P (mind. 1S) = 1 – P(kein S) = 1 – 0.5 · 0.5 = $\underline{\underline{0.75}}$ = $\underline{\underline{75\ \%}}$.	1.5 P.

<table>
<tr>
<td>e)</td>
<td>
Baumdiagramm:
(Legende: <u>Vorgaben</u> / Folgerungen / in i) gesuchtes Ereignis)


(0.5 P.)

i) P(L steigt) $= 0.55 \cdot 0.7 + 0.45 \cdot 0.8$
$= 0.385 + 0.36 = \underline{\underline{0.745}} = \underline{\underline{74.5\ \%}}$ (1.5 P.)

ii) $P(\text{S wenn L steigt}) = \dfrac{P(\text{S und L steigt})}{P(\text{L steigt})}$
$= \dfrac{0.385}{0.745} = 0.516778\ldots = \dfrac{77}{\underline{\underline{149}}} = \underline{\underline{51.68\ \%}}$ (1.5 P.)
</td>
<td>3.5 P.</td>
</tr>
<tr>
<td>f)</td>
<td>
Ingesamt gibt es $6 \cdot 8 = 48$ mögliche Ereignisse,
alle gleich wahrscheinlich.

6 davon sind Unentschieden, also verbleiben 42 mögliche Ereignisse. (1 P.)

Peter gewinnt, wenn …

… Peter 2, Paul 1,
… Peter 3, Paul 1 oder 2,
… Peter 4, Paul 1, 2 oder 3,
… Peter 5, Paul 1, 2, 3 oder 4,
… Peter 6, Paul 1, 2, 3, 4, oder 5,

… also in 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 Fällen. (1 P.)

(Paul gewinnt somit in 42 – 15 = 27 Fällen.
Oder: Paul gewinnt auch in diesen 15 Fällen plus je sechs Fälle, wenn er eine 7 oder 8 würfelt: 15 + 12 = 27. Somit total 15 + 27 = 42 Fälle mit einem Sieger.)

Es gilt: P(Peter gewinnt) $= \dfrac{15}{42} = 0.35714\ldots$ (1 P.)

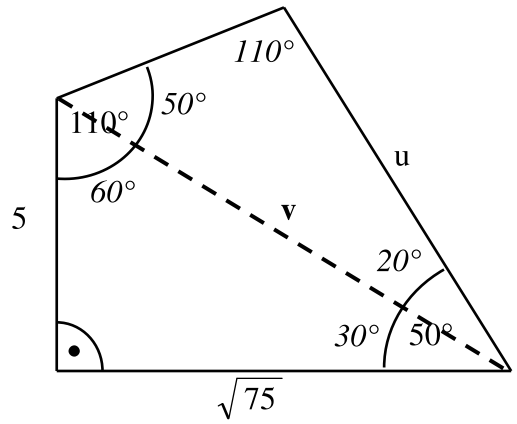
Wenn das Spiel fair sein soll, muss er auch den entsprechenden Einsatz leisten:

Einsatz Peter: $\dfrac{15}{42} \cdot 200$ Rp. = <u><u>71 Rp.</u></u>
Einsatz Paul: 200 – 71 = <u><u>129 Rp.</u></u> (1 P.)
</td>
<td>4 P.</td>
</tr>
</table>

Aufgabe 4 Schnittwinkel		7 P.
a)	<u>Koordinaten der Eckpunkte:</u> <u>A(0/–5), B(6/4)</u> *(1 P.)* (mit *intersect* berechnen oder im *table* ablesen) <u>Winkel α:</u> $m_1 = Y_1'(0) = 2.25$ (mit *dx/dy* oder *nDeriv*) *(0.5 P.)* $m_2 = Y_2'(0) = 0$ (mit *dx/dy* oder *nDeriv*) *(0.5 P.)* $\Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}(2.25) = 66.037511\ldots \approx \underline{\underline{66.04°}}$ *(1 P.)* <u>Winkel β:</u> $m_1 = Y_1'(6) = 1.125$ (mit *dx/dy* oder *nDeriv*) *(0.5 P.)* $m_2 = Y_2'(3) = 3$ (mit *dx/dy* oder *nDeriv*) *(0.5 P.)* $\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = \tan^{-1}(1.125) = 48.366460\ldots \\ \varphi_2 = \tan^{-1}(3) = 71.565051\ldots \end{cases}$ $\Rightarrow \quad \beta = \varphi_2 - \varphi_1 = 23.198590\ldots \approx \underline{\underline{23.20°}}$ *(1 P.)*	5 P.
b)	Der Graph von Y_1 ist ein Halbkreis mit Mittelpunkt O(0/0) (denn $x^2 + Y_1^2 = 5^2$). Der Graph von Y_2 ist für jeden Wert von a eine Ursprungsgerade, also eine Gerade die durch O(0/0) geht. Der Graph von Y_2 kann somit für jeden Wert von a als Kreisradius interpretiert werden. Weil die Kreistangente immer senkrecht zum Kreisradius steht (und der Schnittwinkel über Tangenten definiert ist), ist folglich <u>a beliebig</u>.	2 P.

Aufgabe 5 Wasserbehälter		7 P.
a)	$x = 3,\ y = 2$ Volumen V: $V_{Quader} = (2\cdot 3)\cdot(2\cdot 3)\cdot 2 = 6\cdot 6\cdot 2 = 72$ $V_{Halbzyl.} = \frac{1}{2}\cdot\left(\pi\cdot 3^2\cdot(2\cdot 3)\right) = 27\pi = 84.823001\ldots$ $\Rightarrow\quad V_{Behälter} = V_{Quader} + V_{Halbzyl.} = 156.823001\ldots \approx \underline{\underline{156.82}}$ *(1 P.)* Oberfläche F: $F_{Behälter} = A_{Boden} + 4\cdot A_{Rechteck} + 2\cdot A_{Halbkreis} + 0.5\cdot A_{Zyl.-Mantel}$ $= (2\cdot 3)^2 + 4\cdot((2\cdot 3)\cdot 2) + 2\cdot(0.5\cdot\pi\cdot 3^2) + 0.5\cdot(2\pi\cdot 3\cdot(2\cdot 3))$ $= 36 + 48 + 9\pi + 18\pi$ *(1.5 P.)* $= 168.8230016\ldots \approx \underline{\underline{168.82}}$	2.5 P.
b)	$V_{Quader} = (2x)\cdot(2x)\cdot y = 4x^2y$ $V_{Halbzyl.} = \frac{1}{2}\cdot\left(\pi\cdot x^2\cdot(2\cdot x)\right) = \pi x^3$ $\Rightarrow\quad V_{Behälter} = V_{Quader} + V_{Halbzyl.} = 4x^2y + \pi x^3 = 100$ *(1 P.)* $F_{Behälter} = A_{Boden} + 4\cdot A_{Rechteck} + 2\cdot A_{Halbkreis} + 0.5\cdot A_{Zyl.-Mantel}$ $= (2x)^2 + 4\cdot((2x)\cdot y) + 2\cdot(0.5\cdot\pi x^2) + 0.5\cdot(2\pi x\cdot 2x)$ $= 4x^2 + 8xy + \pi x^2 + 2\pi x^2$ *(1 P.)* $= (4+3\pi)x^2 + 8xy \approx 13.424777\ldots x^2 + 8xy$ Hauptbedingung: $F_{Behälter} \to$ minimal Nebenbedingung: $V_{Behälter} = 100$ Nebenbedingung nach y auflösen und in Hauptbedingung einsetzen: $\text{NB}:\quad y = \frac{100-\pi x^3}{4x^2}$ *(0.5 P.)* $\text{HB}:\quad F(x) = (4+3\pi)x^2 + 8x\cdot\left(\frac{100-\pi x^3}{4x^2}\right) \to$ minimal *(0.5 P.)* $\Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{x}} = 2.4102848\ldots \approx \underline{\underline{2.41}} \\ \underline{\underline{F(x)}} = 124.46663\ldots \approx \underline{\underline{124.47}} \end{cases}$ (mit *minimum*) *(1 P.)* in NB einsetzen: $\underline{\underline{y}} = 2.4102848\ldots \approx \underline{\underline{2.41}}$ (also x = y !) *(0.5 P.)*	4.5 P.

Aufgabe 6 Unbekannte Vierecksseite	5 P.



- Hilfslinie v ziehen *(1 P.)*
- v berechnen: $v = \sqrt{5^2 + 75} = \sqrt{100} = 10$ *(1 P.)*
- Winkel im unteren Dreieck berechnen (mit Trigonometrie und Winkelsumme oder dem Argument „halbes gleichseitiges Dreieck“):

  $\tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{75}}\right) = 30°$ (z.B.) *(1 P.)*
- Winkel im oberen Dreieck ermitteln (elementargeometrisch) *(0.5 P.)*
- Im oberen Dreieck Sinussatz anwenden:

  $\frac{u}{\sin 50°} = \frac{v}{\sin 110°} \Rightarrow u = \frac{10 \cdot \sin 50°}{\sin 110°} = 8.152074\ldots \approx \underline{\underline{8.15}}$ *(1.5 P.)*

Aufgabe 7 Streichhölzchen-Bilderrahmen		8 P.
a)	waagrecht: 6 Zeilen · 9 Hölzchen + 4 Zeilen · 4 Hölzchen = 70 Hölzchen senkrecht ebenso. $\Rightarrow \quad \underline{\underline{h = 140}}$	1 P.
b)	waagrecht: 6 Zeilen · n Hölzchen + (n – 5) Zeilen · 4 Hölzchen = 6n + (n – 5) · 4 = 10n – 20 senkrecht ebenso. $\Rightarrow \quad h = 2 \cdot (10n - 20) = 20 \cdot (n - 2) = 20n - 40$ $\Rightarrow$ mit n = 900 folgt $\underline{\underline{h = 17'960}}$ Variante: Direkt rechnen $6 \cdot 900 + 895 \cdot 4 = 8980 \quad \Rightarrow \quad 8980 \cdot 2 = \underline{\underline{17'960}}$	2 P.
c)	$h = 20n - 40 = 900$ $\Rightarrow \quad n = \frac{900 + 40}{20} = \underline{\underline{47}}$	2 P.
d)	Format / Anzahl 1 x 1: 56 2 x 2: 28 3 x 3: 0 4 x 4: 0 5 x 5: 1 6 x 6: 4 7 x 7: 9 8 x 8: 4 9 x 9: 1 $\quad \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Total } 103}}$	3 P.