Lösung Analysis I (Geiger)

Seite 1/2

GB-Matur 2005 Aufgabe 1

1. y-Werte ablesen

- Maßstab auf der y-Achse: 10 000 h ≙ 76 mm → 1 mm ≙ 131,58 h

(Die x-Achse ist leider etwas versetzt: Abstand 10000 bis 2000 ≙ 61,3 mm ⇒ 1 mm ≙ 130,5 h)

- y-Werte bei

x =	8	12	16	20
in mm*:	3,5	12,5	38	80,5
y Wert**:	458,5	1637,5	4978	10 545,5

* Punkte 3 mm Durchmesser → Obergrenze − 1,5 mm.

** 1 mm ≙ 131 h

- Ablesegenauigkeit: Messung auf ± 0,5 mm (Messgenauigkeit), ± 1 mm, ± 1,5 mm (Radius) genau

→ y-Werte auf ± 70 h, ± 130 h, ± 200 h genau

2. Vergleich mit f(x)

x =	8	12	16	20
$f(x) = 0{,}236\,x^{3{,}58}$	403,6	1723,4	4826,8	10730

je nach Beurteilung des Fehlers sind die Werte innerhalb oder außerhalb

± 0,5 mm	✓	–	–	–
± 1 mm	✓	✓	–	–
± 1,5 mm	✓	✓	✓	✓

3. Ableitung

$f'(x) = 0{,}236 \cdot 3{,}58 \cdot x^{2{,}58} = \underline{0{,}84488 \cdot x^{2{,}58}}$

$f'(12) = \underline{\underline{514{,}1414812}}$

4. Tägliche Übungszeit I

$f(12) - f(11) \approx 461{,}2674996$ (Übungszeit während 12. Jahr)

$461{,}26\ldots : 365{,}25 \approx 1{,}262881587\,h$

$(\quad " \quad : 365 \approx 1{,}263746574\,h$

} 1 h 16 min

5. Tägliche Übungszeit II

1. Variante $f'(12) = 514{,}1414812\,h$ (momentane jährliche Übungszeit)

$f'(12) : 365{,}25 = \underline{\underline{1{,}407}}642659\,h$ 1 h 24,5 min

→

Geiger-Aufgabe, Lösung (Seite 2/2) | GB-Matur 2005/Aufg. 1

Nr. 5 Forts. 2. Variante: Übungszeit am 12. Geburtstag:

$$f\left(12+\frac{1}{365{,}25}\right)-f(12) = \underline{1{,}408}057005\,h = \underline{1\,h\ 24{,}5\,min}$$

6. <u>Funktionsgleichung der täglichen Übungszeit</u>

Verallgemeinerung von 5. Funktion g

$$g(x) = f'(x) : 365{,}25 \approx 0{,}0023131554 \cdot x^{2{,}58}$$

oder $f'(x) : 365 \approx 0{,}0023147397 \cdot x^{2{,}58}$

oder nach Variante 2

$$g(x) = f\left(x+\frac{1}{365{,}25}\right) - f(x)$$

oder $g(x) = f\left(x+\frac{1}{730{,}5}\right) - f\left(x-\frac{1}{730{,}5}\right)$

7. <u>Gültigkeitsbereich von f</u>

f und f' sind Potenzfunktionen mit Hochzahl > 1 und nehmen immer schneller zu. Die tägliche Übungszeit würde auf unrealistische Werte ansteigen.

Sicher unrealistisch wäre $g(x) \geq 24 \rightarrow x = 36{,}023576$

aber auch $g(x) \geq 12$ oder ähnliches
$x \approx 27{,}5$

x	Tägl. Übzeit eines genau x-Jährigen, gemäß Formel $f\left(x+\frac{1}{2\cdot 365}\right)-f\left(x-\frac{1}{2\cdot 365}\right)$
24	8.4 Std.
25	9.4
26	10.4
27	11.4
28	12.5
29	13.7
30	15.0
31	16.3
32	17.7
33	19.2
34	20.7

x	Tägl. Üb.
35	22.3
36	24.6
37	25.7

Bewertung Analysis-Aufgaben

GB-Matur 2005
Aufgabe 1

Analysis I (Geiger)

1.	2,5 P.	Maßstab auf der y-Achse	1 P.
		y-Werte abmessen und in h umrechnen	0,5 P.
		Messgenauigkeit realistisch	0,5 P.
		In Stunden umrechnen	0,5 P.
2.	1 P.	Funktionswerte berechnen	0,5 P.
		Beurteilung, ob innerhalb Toleranz gemäß 1.	0,5 P.
3.	1,25 P.	$f'(x) = \underbrace{0{,}236 \cdot 3{,}58}_{0{,}84488} x^{2{,}58}$	0,5 P.
			0,25 P.
		$f'(12)$	0,5 P.
4.	1,5 P.	$f(12) - f(11)$ und dies als jährliche Überzeit interpretiert	1 P
		... : 365 (: 365,25)	0,5 P
5.	1,25 P.	Idee, $f'(12)$ = moment. jährl. Überzeit	0,75 P.
		$f'(12) : 365$	0,5 P.
6.	1 P.	$f'(x) : 365$	0,75 P.
		$= 0{,}0023131.. \, x^{2{,}58}$	0,25 P.
7.	1,5 P.	Monotonie von f' benannt	0,5 P.
		mit Hochzahl begründet	0,25 P.
		Unrealistisches Zahlenbeispiel	0,5 P.
		in Worten interpretiert	0,25 P.

Total 10 P.

GB-Matur 2005

Aufgabe 2 / Lösung

Aufgabe 2

Zwei Brüder spielen, Lösung

2.1

1) p (David verliert alle drei Partien) = $0.6^3 = 21.6\%$ 1P.

2) p (David gewinnt genau einmal) =

$0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.1 = 3 \cdot 0.1 \cdot 0.9^2 = 24.3\%$ 2P.

3) p (David gewinnt mindestens einmal) = 1 — p (David gewinnt nie) =

$1 - 0.9^3 = 27.1\%$ 2P.

4) p (mindestens 2 der Partien enden remis) = p (genau 2 Partien enden remis) +
p (genau 3 Partien enden remis) = $3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 + 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 = 21.6\%$ 2P.

2.2.

Es wird (natürlich statistisch gesehen!) am Ende von 70% aller Partien zwischen David und Philipp "Schachmatt" heißen. In 10% bzw. 60% aller Partien, d.h. aber in $\frac{1}{7}$ bzw. $\frac{6}{7}$ aller Partien mit einem Sieger ist David bzw. Philipp der Gewinner.

Die Antwort lautet also: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Philipp der Sieger ist, beträgt $\frac{6}{7} = 85.7\%$. 2P.

2.3.1.

Das Spiel endet in den folgenden Fällen mit dem Sieg von David:

Philipps Wurfergebnis	1	2	3
Davids Wurfergebnis	2	3	4

Jede Spalte tritt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{16}$ auf. Die Wahrscheinlichkeit für *eine* der drei Spalten beträgt also $\frac{3}{16} = 18.75\%$. 2P.

2.3.2

Statt alle Fälle aufzulisten, in welchen das Spiel unentschieden ausgeht, ist es einfacher, sich zunächst diejenigen mit Philipp als Sieger vorzuknöpfen:

Philipps erstes Wurfergebnis	1	1	2	2	3	3	3	4	4	4
Davids Wurfergebnis	1	3	1	2	1	2	3	1	2	3
Philipps zweites Wurfergebnis	2	4	2	3	2	3	4	2	3	4

Jede Spalte tritt mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{64}$ auf. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit für den Sieg von Philipp zehnmal so groß, also gleich $\frac{10}{64}$. 4P.

Die Wahrscheinlichkeit für ein Spiel ohne Sieger ergibt sich nun mit Hilfe dieses Resultates und desjenigen aus 2.3.1. Sie beträgt $1 - \frac{3}{16} - \frac{10}{64} = \frac{42}{64} = 65.625\%$.

15 P.

Aufgabe 3.1

Bestseller-Autoren, Lösung

B = Blyton, C = Christie, L = Lenin, M = Marx, S = Simenon, T = Tolstoj, V = Verne .

Uwe vermutet (4 davon sind richtig)	C	T	V	M	S	L	B
Theo vermutet (5 davon sind richtig)	L	C	B	M	S	T	V

Werner hat sich vermutlich überlegt, dass man aus der Zeile von Theo durch Vertauschen zweier Autoren zur richtigen Lösung gelangen kann. Genau fünf sind nämlich nach Aussage von Fritz schon an den richtigen Stellen. Diese Autoren müssen an ihrem Ort verbleiben , während die Positionen der beiden falschen gegeneinander auszuwechseln sind. Es gilt nun herauszufinden, welche der sieben Autoren die beiden "falschen" sind.
Nun hat Werner ja von Fritz auch erfahren, dass sich bei Uwe genau vier Autoren an den richtigen Stellen befinden. Deshalb muss er die oben erwähnte Vertauschung so vornehmen, dass die dadurch entstehende Zeile in genau vier Stellen mit der "Uwe-Zeile" übereinstimmt. Werner hat nun natürlich bemerkt, dass die Uwe- und die Theo-Zeile in genau zwei Elementen, nämlich M und S, bereits übereinstimmen. An diesen darf er also sicher nicht "rütteln". Durch die Vertauschung muss die "Übereinstimmungsanzahl" auf vier erhöht werden. Dies ist nur durch die Vertauschung von B und V möglich. Allein diese Autoren stehen nämlich in den beiden Zeilen bereits übereinander, allerdings (noch) miteinander vertauscht. Bei der Vertauschung zweier anderer Autoren könnte man eine Übereinstimmung in höchstens drei Autoren erreichen.

Die richtige Lösung ist also eindeutig bestimmt und lautet:

Richtige Reihenfolge	L	C	V	M	S	T	B

Bewertung: Maximal 7 Punkte

- Ein "nacktes" Resultat ohne jede Erklärung zählt vereinbarungsgemäß nichts.
- Klar ist: Je nachdem, wie viele der oben vorgebrachten (oder entsprechend variierter) Argumente vorhanden sind, erhöht sich die Punkteanzahl. Es dürfte schwierig sein, dies im Einzelnen genau zu fixieren.
- Der Hinweis darauf, dass die Lösung eindeutig sei, muss gegeben sein und wird mit 1 Punkt belohnt.
- Für den sprachlichen Ausdruck werden 2 der 7 Punkte gegeben; bei miserabler Formulierung kann die Punkteanzahl also trotz inhaltlich Richtigem höchstens 5 betragen.

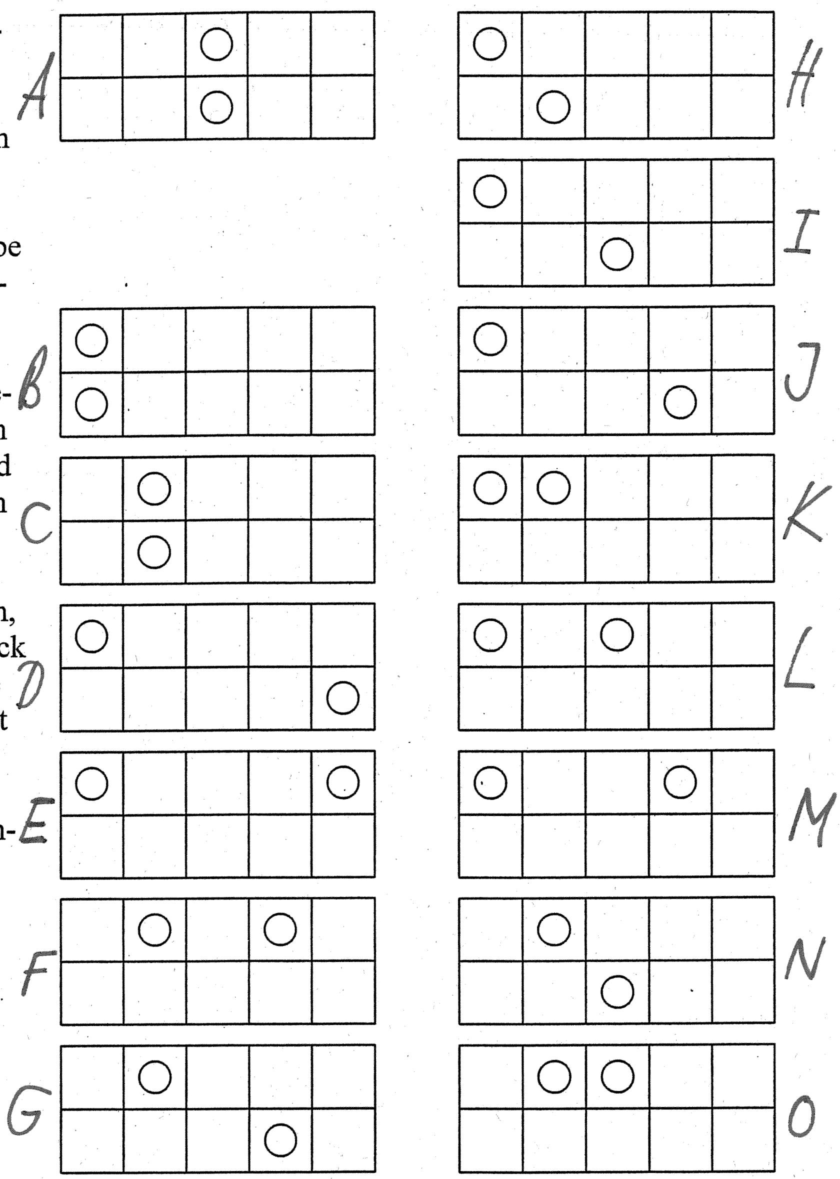
Aufgabe 3. 2

Juans Spielmarken, Lösung

Es gibt im Ganzen 15 verschiedene Typen.

Sie sind in den rechts stehenden Figuren dargestellt.

Es sei hier — was in der Aufgabe selber nicht verlangt wird — bemerkt, dass durch Drehen und/oder Umwenden aus der obersten Figur links keine andere, aus den unteren sechs linken Figuren je noch eine andere und aus den sieben rechts stehenden Figuren je drei weitere gewonnen werden können.
Die Gesamtanzahl aller Figuren, welche aus dem 5x2 — Rechteck durch Einfügung zweier Kreise entstehen können, beträgt somit $1 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 8 \cdot 4 = 45$.
Daraus ergibt sich eine Kontrollmöglichkeit, denn diese Anzahl ist offensichtlich auch gleich $\binom{10}{2}$, und diese Zahl ist tatsächlich auch gleich 45 .



Bewertung:

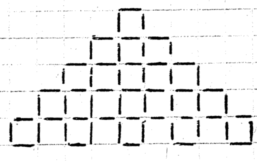
- Für die ersten 12 allenfalls vorhandenen*) Figuren gibt es je $\frac{1}{3}$ Punkt = 4 Punkte
- Für die 13.*) Figur gibt es 1 Punkt
- Für die 14.*) Figur gibt es 2 Punkte
- Für die 15.*) Figur gibt es 3 Punkte

  Total also maximal 10 Punkte
- Für jede doppelt vorhande Figur wird nicht nur nichts gezählt, sondern jeweils 1 Punkt abgezogen.

*) korrekte, d.h. nicht doppelt aufgeführte

Lösungen — Folgen & Reihen

GB-Matur 2005 — Aufgabe 4 — Punkte

1. Figur 5  (1)

2. Figur 20 besteht aus $\underline{\underline{840}}$ Streichhölzern.

Entweder

n	1	2	3	4	5	...
a_n	4	12	24	40	60	...

$+2\cdot4 \quad +3\cdot4 \quad +4\cdot4 \quad +5\cdot4$

und seq(4u, u, 1, 20) mit cum sum das letzte Glied.

oder direkt

n	1	2	3	4	5	...
a_n	4	12	24	40	60	
	$2\cdot2$	$4\cdot3$	$6\cdot4$	$8\cdot5$	$10\cdot6$	

also $a_{20} = 2\cdot20\cdot(20+1) = \underline{\underline{840}}$. (1½)

3. $\underline{\underline{a_{n+1} = a_n + 4\cdot(n+1)}}$ vgl. 1. Lösung bei 2. (1)

4. $\underline{\underline{a_n = 2n(n+1)}}$ oder $\underline{\underline{a_n = 2n^2 + 2n}}$ vgl. 2. Lösung bei 2 (1½)

$a_{500} = 2\cdot500\cdot(501) = \underline{\underline{501\,000}}$ (½)

5. Anzahl Quadrate, die von 4 Hölzchen eingeschlossen sind:

$n^2 - n + 1$, testen für $n = 4$: $16 - 4 + 1 = 13$ ✓

" " $n = 5$: $25 - 5 + 1 = 21$ ✓ (2)

Zu $n = 4$: # Quadrate sind $1 + 3 + 5 + 4 = 13$

" $n = 5$ " " $1 + 3 + 5 + 7 + 5 = 21$

6. # Hölzchen im Mittel bei Figur n :

Streichhölzer war $2n^2 + 2n$; # Quadrate war $n^2 - n + 1$

Somit # Hölzchen pro Quadrat in Figur n $= \dfrac{2n^2 + 2n}{n^2 - n + 1}$

und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+2n}{n^2-n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \underline{\underline{2}}$ (2½)

$\frac{2}{n} \to 0$, $\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to 0$

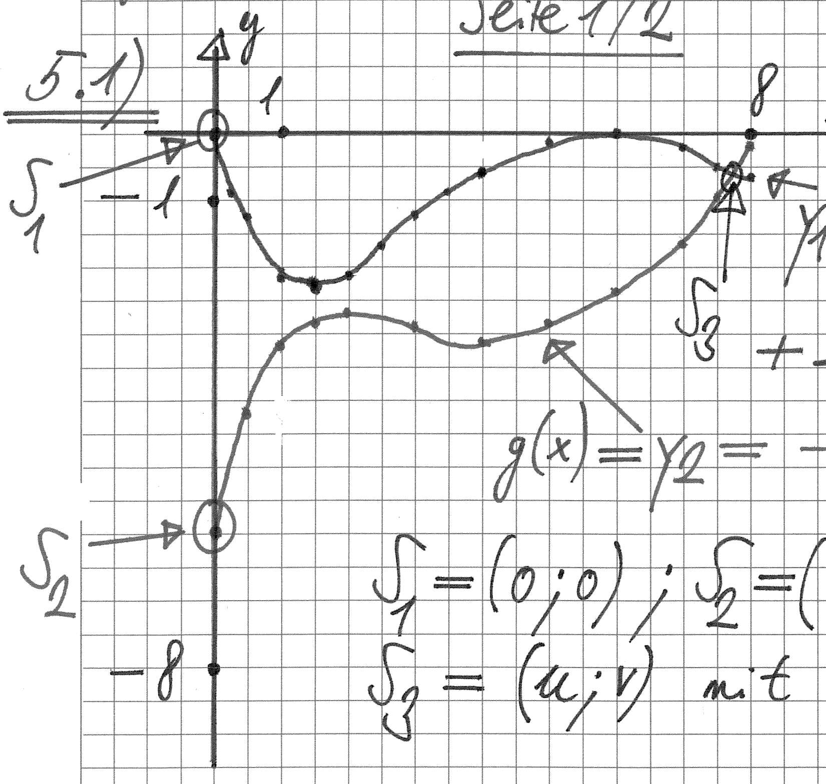
Total $\underline{\underline{10\text{ P.}}}$

GB-Matur 2005
Lösungen

Aufgabe 5 (Fischaufgabe)

Seite 1/2

5.1)



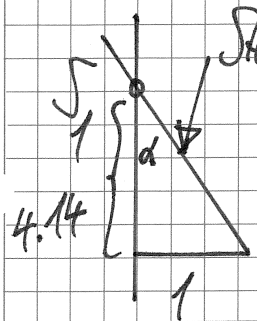
$$y_1 = -0.0025x^5 + 0.06x^4 - 0.565x^3 + 2.46x^2 - 4.14x$$

$$g(x) = y_2 = -y_1(x) + 0.6x - 6$$

$S_1 = (0;0)$; $S_2 = (0;-6)$

$S_3 = (u;v)$ mit $u \approx 7.680823$

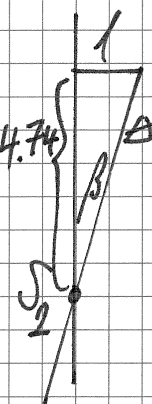
$v \approx -0.695753$



Steigung = −4.14

$\tan(\alpha) = \frac{1}{4.14}$

• $\alpha \approx 13.579^\circ$

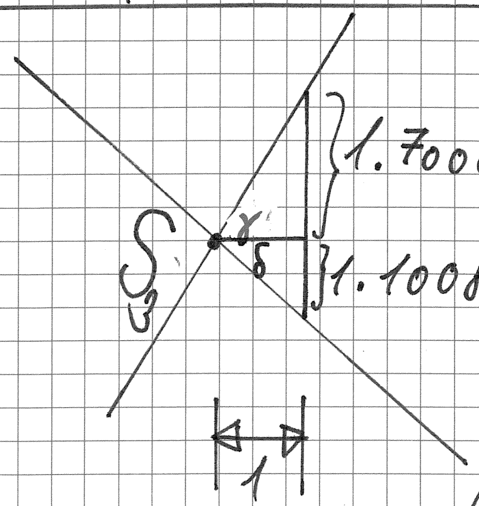


Steigung = 4.74

$\tan(\beta) = \frac{1}{4.74}$

• $\beta \approx 11.913^\circ$

d): 1P.
0.5P.



$\tan(\gamma) \approx 1.700821$

$\gamma \approx 59.547^\circ$

$\tan(\delta) \approx 1.100821$

$\delta \approx 47.748^\circ$

• $\gamma + \delta \approx 107.294^\circ$

$(180^\circ - \gamma - \delta \approx 72.706^\circ)$

1P.

GB-Matur 2005
Lösungen

Aufgabe 5 (Fischaufgabe)
Seite 2/2

5.2)

$$\int_0^u (y_1(x) - y_2(x))\,dx = \underline{\underline{14.537}}$$

1.5 P.

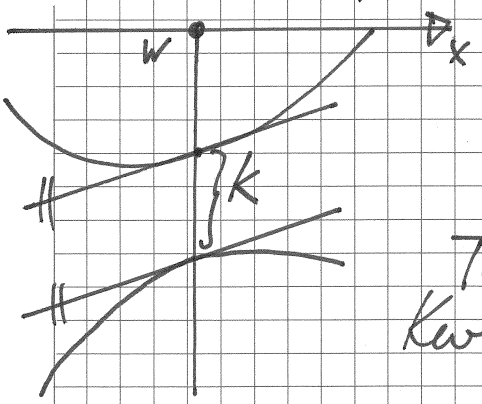
5.3)

$y_1'(x) = y_2'(x)$
SOLVER; Startwert 1.5

Lösung: $w \approx 1.605$

$y_1'(w) = y_2'(w) = \underline{\underline{0.3}}$ (exakt)

1.5 P.

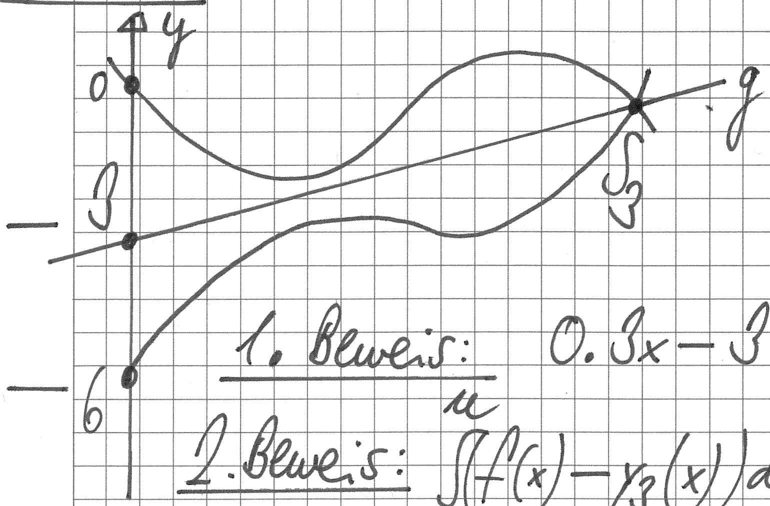


$\underline{\underline{K}} = y_1(w) - y_2(w) \approx \underline{\underline{0.493}}$

Term für die verschobene Kurve: $\underline{\underline{y = g(x) + K}}$

1 P.

5.4)



$g =$ (z. B.) Verbindungsgerade von $(0; -3)$ und S_3

Term: $\underline{\underline{y_3 = 0.3x - 3}}$

1 P.

1. Beweis: $0.3x - 3 = \dfrac{f(x) + g(x)}{2}$ etc.

2. Beweis: $\int_0^u (f(x) - y_3(x))\,dx \approx \underline{7.268255}$

$\int_0^u (y_3(x) - g(x))\,dx \approx \underline{7.268255}$

1.5 P.

TOTAL 10 P.