Vorbemerkungen:

1. Erlaubte Zeit: 4 Stunden
2. Erlaubte Hilfsmittel:
   - Fundamentum Mathematik und Physik
   - Taschenrechner TI 83
3. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht bewertet.
4. Es können maximal 75 Punkte erreicht werden. Für die Note 6 genügen 68 Punkte.
5. Jede der 6 Aufgaben muss auf ein separates Blatt gelöst werden. (Eventuell sind dazu mehrere Blätter erforderlich; keinesfalls aber dürfen Aufgaben gemischt werden. Alles ist klar zu gliedern und übersichtlich mit Nummern zu versehen!)

Viel Erfolg wünschen: Thomas Ahrend, Barbara Fankhauser, Urs Handschin, Halina Michalski, Peter Nyikos und Andreas Stahel!

Aufgabe 1 Raumgeometrie: Modellflugzeuge (2 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 4 = 17 Punkte)

In dieser Aufgabe sei die Längeneinheit 1 Meter und die Zeiteinheit 1 Sekunde; Geschwindigkeiten werden somit stets in m/s gemessen.
Modellflugzeugliebhabern steht eine rechteckige Wiese vom Format 200 x 300 zur Verfügung, über welcher sie ihre Flugkörper bis zur Maximalhöhe 75 aufsteigen lassen dürfen. Der ihnen zur Verfügung stehende Quader ist auf dem Beiblatt eingezeichnet.
Alle Modellflugzeuge werden als punktförmig angenommen.

1.1 Ein Flugzeug I bewegt sich geradlinig vom Startpunkt S(300;0;0) zum Zielpunkt Z(0;300;120) (Siehe Figur 1). Seine Bahn liegt nur teilweise innerhalb des zulässigen Quaders.

- 1.1.1 Zeichne die verbotenen Flugstreckenteile farbig ein. Die dazu nötigen Konstruktionen müssen klar ersichtlich sein!
- 1.1.2 Ermittle rechnerisch die Länge des erlaubten Teiles der Flugbahn von Flugzeug I !
- 1.1.3 Welchen Steigungswinkel α hat die Bahn von I ?
- 1.1.4 Das Flugzeug I bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit. Ein Flugzeug II startet gleichzeitig mit I in Z und fliegt ihm auf derselben Bahn entgegen. Die Geschwindigkeit von II ist doppelt so groß wie die Geschwindigkeit von I. Berechne die Koordinaten des Treffpunktes T !
  Hinweis: Diese Aufgabe lässt sich mit kleinem Rechenaufwand lösen.

1.2 Beim Nullpunkt wohnt Herr Ursprung, der sich über Modellflugzeuge ärgert und oft reklamiert. Deshalb vermeiden die Piloten den pyramidenförmigen Teil ihres Quaders, der unter dem in Figur 2 gezeichneten Dreieck liegt. Flugzeug III fliegt geradlinig von V nach W. Zeichne die außerhalb der Pyramide liegende Teilstrecke der Flugroute farbig ein! Auch hier muss die Konstruktionsmethode zu erkennen sein.

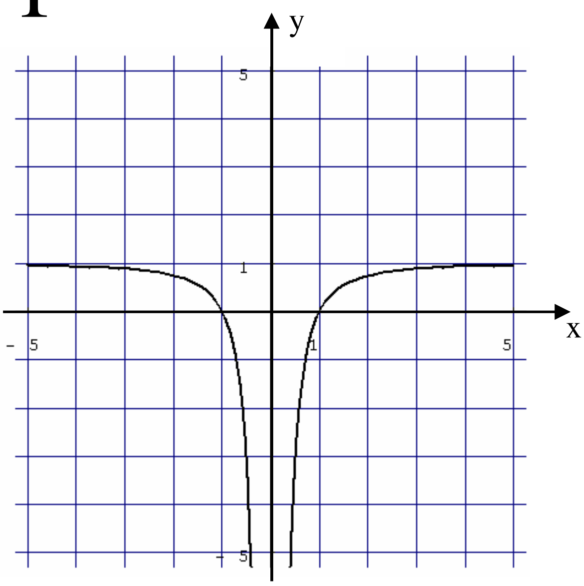
1.3 Zum Zeitpunkt t befindet sich Flugzeug IV im Punkt $(0;150;3t)$, Flugzeug V im Punkt $(200;6t;45)$. Die Bewegungen von IV und V beginnen zur Zeit $t = 0$.

- 1.3.1 Zeichne die Startpunkte und die Flugbahnen samt Flugrichtungen in die Figur 2 ein!
- 1.3.2 Zu welchem Zeitpunkt haben IV und V den kleinsten Abstand voneinander? Wo befinden sie sich in diesem Augenblick?

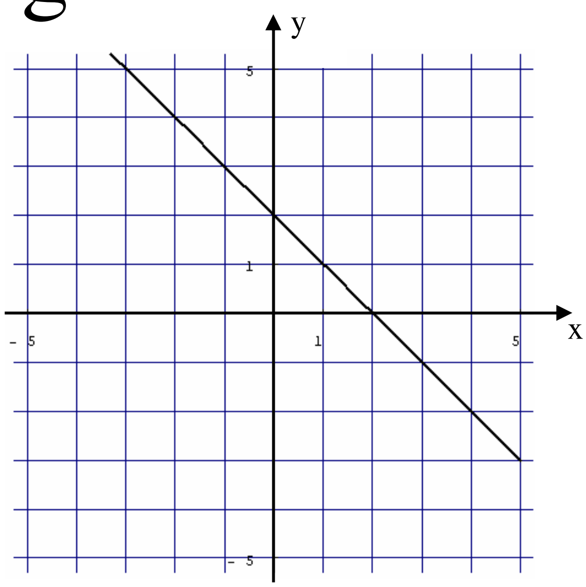
Aufgabe 2 Differenzieren (6 + 2.5 + 2 + 2.5 = 13 Punkte)

2.1 Auf dem Beiblatt findest du 6 Funktionsgraphen abgebildet.
Die unten abgebildeten Graphen stellen Ableitungsfunktionen f' bzw. g' dar.
Welche Funktionsgraphen aus A bis F passen zu f', welche zu g' ?
Gib für diejenigen Graphen, die weder zu f' noch zu g' passen, einen Grund dafür an, warum sie dies nicht tun!

f'



g'



2.2 Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$ und $g(x) = 2x - 3$.

2.2.1 Fertige eine Skizze der Graphen von f und g an und bestimme die Lösung(en) der Gleichung $f(x) = g(x)$.

2.2.2 Begründe, weshalb die Gleichung $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 2x - 1.5$ genau zwei Lösungen hat!

2.2.3 Für welches p hat die Gleichung $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3 = 2x + p$ ebenfalls genau zwei Lösungen?

Aufgabe 3 Folgen und Reihen: Sitzplätze und Gummiball

3.1 (1 + 1 + 2 = 4 Punkte)

Das römische Theater in Augusta Raurica besteht aus Sitzplatztribünen, die auf einer Halbkreisfläche angeordnet sind.
Die gesamte 1. Reihe enthält 80 Sitzplätze. Jede folgende höhergelegene Reihe enthält 5 Sitzplätze mehr als die vorangehende.

3.1.1 Berechne die Anzahl der Sitzplätze in der 25. Reihe!

3.1.2 Gib einen Rechenausdruck für die Anzahl a_n der Sitzplätze in der n-ten Reihe an!

3.1.3 Wie viele Reihen hätte man über der 25. Reihe noch zusätzlich bauen müssen, um insgesamt mehr als 5000 Sitzplätze anbieten zu können?

3.2 (1 + 2 + 1 = 4 Punkte)

Man lässt einen kleinen Gummiball aus 1m Höhe fallen. Er springt jeweils auf 85% seiner vorherigen Fallhöhe zurück.

3.2.1 Berechne, nach dem wievielten Bodenkontakt er zum ersten Mal weniger als 20 cm hochspringt. Wie hoch springt er dabei?

3.2.2 Welchen Gesamtweg hat er zurückgelegt, wenn er zum 5. Mal den Boden berührt?

3.2.3 Welchen Weg legt er zurück, wenn er unendlich oft springt?

Aufgabe 4 Extremwertaufgabe: Zylinder in Pyramide (3 + 4 + 2 = 9 Punkte)

Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide ist ein gleichseitiges Dreieck mit der Kantenlänge $a = 1$. Die Spitze der Pyramide liegt $h = 2$ über dem Schwerpunkt des Grundflächendreiecks. Schneidet man die Pyramide mit einer Ebene parallel zur Grundfläche in der Höhe x über der Grundfläche, so erhält man ein zur Grundfläche ähnliches Dreieck mit der Kantenlänge $a(x) < 1$.

4.1 Beweise, dass $a(x) = 1 - \frac{x}{2}$ gilt!

4.2 In die Pyramide wird ein Zylinder auf die Grundfläche gestellt, wobei dessen oberer Kreisrand mit dem Inkreis des Dreiecks mit der Kante $a(x)$ zusammenfällt. Berechne das Volumen V des Zylinders als Funktion der Schnitthöhe x .

4.3 Für welches x ist das Volumen maximal, und wie gross ist das maximale Volumen?

Aufgabe 5 Anzahlen und Wahrscheinlichkeiten: Schere–Stein–Papier

In dieser Aufgabe geht es um das bekannte Spiel: **„Schere – Stein – Papier“**. Da es in verschiedenen Varianten gespielt wird, ist zu beachten, dass für diese Aufgabe nur die folgende Spielregel gültig ist:
Zwei Spieler sprechen gemeinsam ein Kommando aus drei Wörtern, z. B. „Schere – Stein – Papier“, bewegen dabei ihre rechte Hand drei Mal hin und her und bilden mit dieser Hand beim Aussprechen der letzten Silbe („–pier“) eine von drei möglichen Figuren:
Stein = geschlossene Faust, **Papier** = flache Hand, **Schere** = zwei von der sonst geschlossenen Hand abgespreizte Finger.
Wichtig ist, dass jeder Spieler die Figur des anderen erst dann erkennen kann, wenn er seine eigene bereits gebildet hat. Denn nun gilt:
Schere gewinnt gegen **Papier**: „Schere zerschneidet Papier“,
Papier gewinnt gegen **Stein**: „Papier wickelt den Stein ein“ und
Stein gewinnt gegen **Schere**: „Stein schleift die Schere“.
Zeigen beide Spieler dieselbe Figur, so ist die Runde unentschieden.
Der Reiz des Spieles liegt darin, dass es sehr oft wiederholt werden kann und die Spieler dann versuchen vorherzuahnen, welche Figur der Gegenspieler in der nächsten Runde zeigen wird.

5.1 (2 + 2 + 2 = 6 Punkte)
Klein-Ida spielt mit ihrer großen Schwester Lizzy ein Spiel mit 10 Runden. Der Bruder schreibt in eine Tabelle mit 10 Zeilen und zwei Spalten – eine Spalte für Klein-Ida, eine für Lizzy – nach jeder Runde auf, wer welche Figur gezeigt hat.

5.1.1 Ist es möglich, dass alle Zeilen der Tabelle verschieden sind, oder ist das unmöglich?

5.1.2 Wie viele Spielverläufe sind bei dem Spiel mit 10 Runden möglich, wenn
  a. alles berücksichtigt wird, was der Bruder notiert,
  b. nur berücksichtigt wird, ob Klein-Ida oder Lizzy eine Runde gewonnen hat oder ob diese unentschieden war?

5.1.3 Wie viele Schlussresultate sind nach 10 Runden möglich ohne Berücksichtigung der Reihenfolge, in der dieses zustande kommt?

5.2 (2 + 3 = 5 Punkte)
Für die ganze Aufgabe 5.2 wird angenommen, die SpielerInnen wählten ihre Figur in jeder Runde zufällig und unabhängig vom Ausgang der vorherigen Runden.

5.2.1 Falls sie dabei jede Figur mit Wahrscheinlichkeit 1/3 wählen, mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt dann Klein-Ida eine Runde, mit welcher Wahrscheinlichkeit endet sie unentschieden?

5.2.2 Nach einigen Runden bemerkt Lizzy, dass Klein-Ida „Papier“ viel seltener spielt als die anderen Figuren, vielleicht weil sie „Papier“ für die schwächste Figur hält. Sie selbst spielt von nun an „Papier“ besonders oft. Angenommen, Klein-Ida spiele „Papier“ mit Wahrscheinlichkeit 0.2, Lizzy mit Wahrscheinlichkeit 0.5. „Stein“ und „Schere“ spielen beide Schwestern mit jeweils gleichen Wahrscheinlichkeiten. Wie groß sind nun ihre Gewinnchancen?

5.3 (4 Punkte)
Erneut spielen Klein-Ida und Lizzy. Nach drei Runden werden die Kinder zum Essen gerufen und müssen das Spiel unterbrechen. Der Bruder hatte die Ausgänge der drei

Runden in einer Tabelle notiert (siehe Abbildung unten). Nach dem Essen bemerkt er, dass er vergessen hat, ob Klein-Idas Figuren in der linken oder in der rechten Spalte der Tabelle stehen. Angenommen, der Bruder hatte jede der beiden Möglichkeiten mit 50 % Wahrscheinlichkeit gewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen dann Klein-Idas Figuren links, wenn die Tabelle aussieht, wie unten abgebildet, und wenn wir annehmen, dass die Spielerinnen ihre Spielweisen aus Aufgabe 5.2.2 beibehalten haben?

Stein	Stein
Schere	Papier
Stein	Papier

Aufgabe 6 Integralrechnung (4 + 1.5 + 2 + 3 + 2.5 = 13 Punkte)

Gegeben ist die Polynomfunktion *f* vom 3. Grade mit der Gleichung $y = f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

6.1 Fertige eine Skizze des Graphen von *f* an und berechne den Inhalt der Fläche *A*, die von diesem Graphen und der x-Achse ganz eingeschlossen wird!

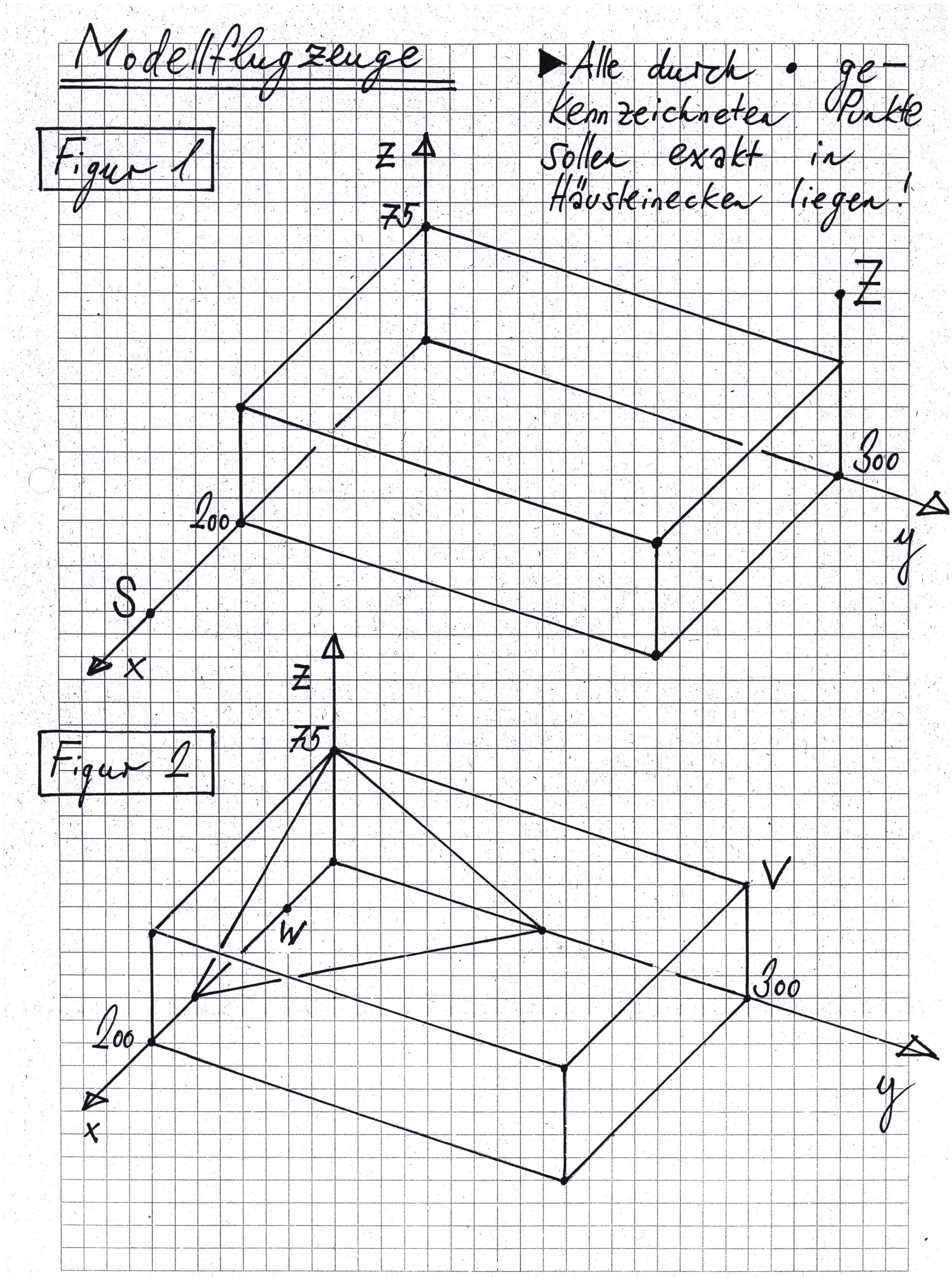
6.2 Berechne das Volumen *V* des Körpers, der entsteht, wenn die Fläche *A* aus Aufgabe 6.1 um die x-Achse rotiert!

6.3 Derjenige Teil der Fläche aus Aufgabe 6.1, der oberhalb der x-Achse liegt, soll durch die Parallele *h* zur y-Achse so geteilt werden, dass der Flächeninhalt halbiert wird. Wo schneidet *h* die x-Achse?

6.4 Nun ist zusätzlich die Polynomfunktion *g* vom 4. Grade gegeben: $y = g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$.
Zeichne den Graphen von *g* sauber in ein Koordinatensystem (Einheiten: je 2 Häuslein)!
Mit Hilfe der Keplerschen Fassregel (KFR), die du im Fundamentum findest, lassen sich bestimmte Integrale *näherungsweise* bestimmen. Berechne einerseits mit der KFR den Näherungswert *K* für $\int_{-2}^{2} g(x)dx$ und andererseits den exakten Wert *I* dieses Integrals!

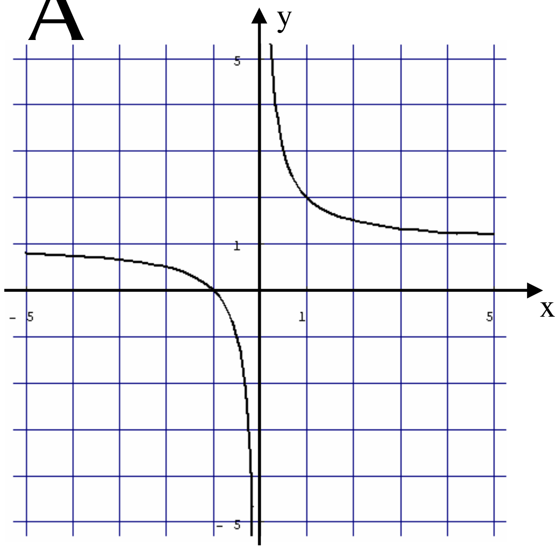
6.5 Die Idee der KFR besteht darin, dass man das Kurvenstück zwischen den Integrationsgrenzen −2 und 2 durch eine Parabel *p* (zweiten Grades) *annähert* und dann über diese Näherungsfunktion integriert. Diese Parabel soll an den beiden Grenzen und an der Stelle genau in der Mitte zwischen diesen Grenzen dieselben Funktionswerte aufweisen wie die anzunähernde Funktion.
D.h. es soll gelten: $p(-2) = g(-2)$, $p(2) = g(2)$, $p(0) = g(0)$.
Skizziere in das bereits vorhandene Koordinatensystem der Aufgabe 6.4 diese Parabel p !
Bestimme die zugehörige Parabelgleichung $y = p(x)$!
Begründe in Worten, wieso in Aufgabe 6.4 *K* von *I* abweicht!

Beiblatt zu Aufgabe 1

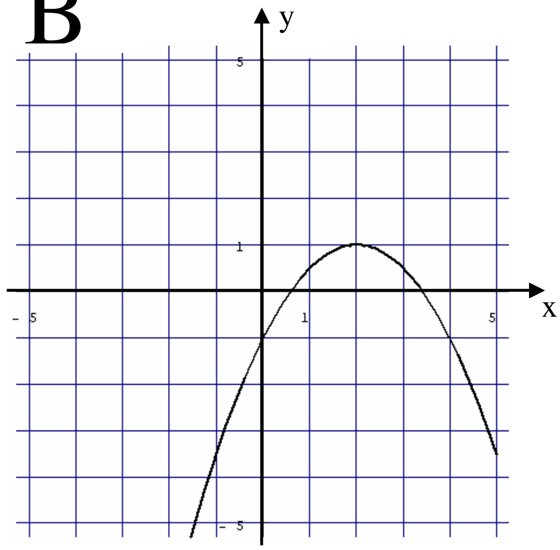


Beiblatt zu Aufgabe 2

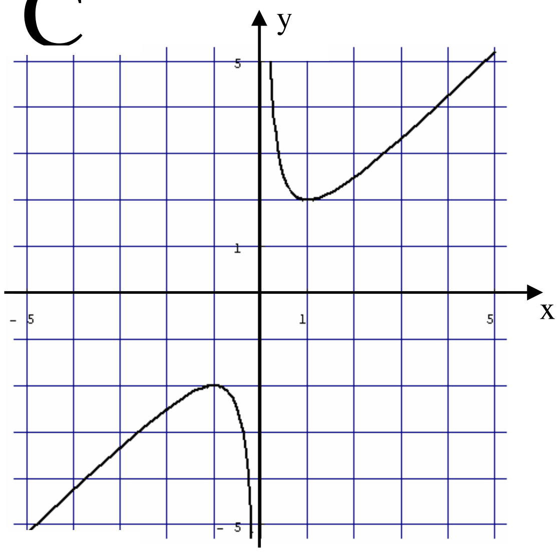
A



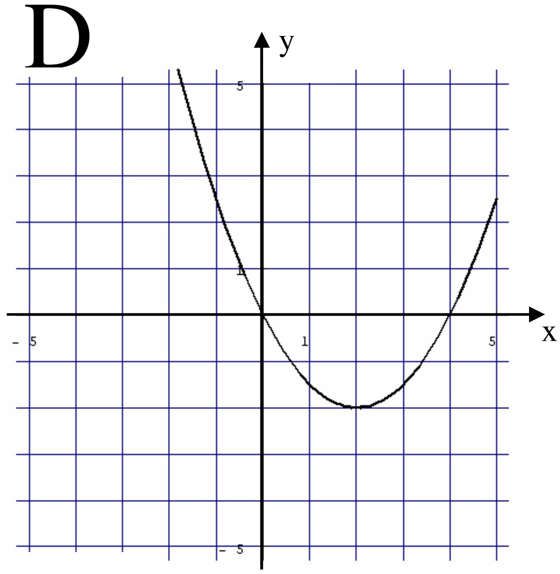
B



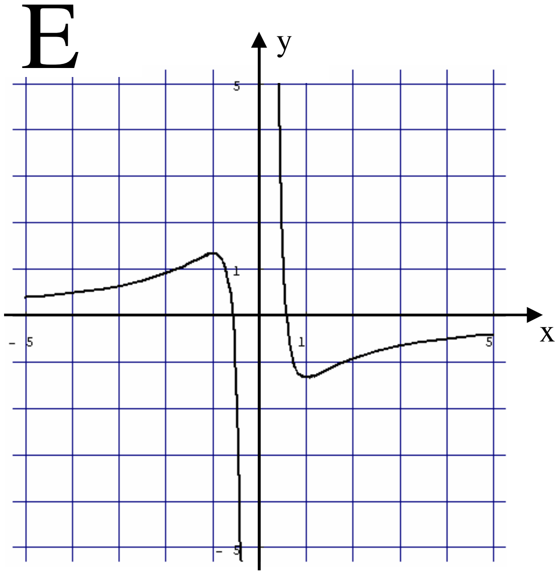
C



D



E



F