# Fach Mathematik
# Klassen alle 5. Klassen

Dauer der Prüfung: 4 Std.
Erlaubte Hilfsmittel: Fundamentum Mathematik und Physik
Taschenrechner TI-83 Plus inkl. Applikation CtglHelp

**Vorbemerkungen:**

1. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht bewertet.
   (Ausnahmen: 1a), 1d), 2a), 2b) und 3.1a).)
2. Jede Aufgabe muss auf ein separates Blatt gelöst werden. Teilaufgaben sind deutlich zu nummerieren.
3. Es können maximal 72 Punkte erreicht werden. Für die Note 6 genügen 65 Punkte.

*Viel Erfolg wünschen Thomas Baier, Barbara Fankhauser, Dieter Graber, Philippe Meili, Halina Michalski und Andreas Stahel!*

**Aufgabe 1** Raumgeometrie (2 + 4 + 2 + 1 + 3 + 4 = 16 Punkte)

Die Illustration auf Seite 4 soll Ihnen bei der Veranschaulichung dieser Aufgabe helfen!

Aus dem vektorgeometrischen Ozean ragt eine kegelförmige Insel. Die Uferlinie ist ein Kreis mit Radius 8 um (0|0|0). Die Spitze des Kegels liegt im Punkt (0|0|8). Auf der Insel gibt es zwei Dörfer. Sie liegen in den Punkten P(6|–4.5|0.5) und Q(–2.5|6|1.5).

Das Strassennetz auf der Insel besteht aus einer Ringstrasse, welche ganz ohne Steigung die Insel in der Höhe $z = 1.5$ umrundet, und aus einer weiteren Strasse, die den Punkt P auf kürzestem Weg mit der Ringstrasse verbindet (Einmündung K).

a) Zeichnen Sie eine Karte der Insel, also eine Ansicht senkrecht von oben. Die Karte soll den Umriss der Insel, die Lage der zwei Dörfer und das Strassennetz beinhalten. Wählen Sie dazu auf beiden Achsen je 1 cm als Einheit.

Von P nach Q soll ein Strassentunnel gebaut werden. Von P aus bohren die Tunnelbauer in Richtung $\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ und von Q aus in Richtung $\begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Zeigen Sie rechnerisch, dass sich die beiden Tunnelstollen von P und Q aus in einem Schnittpunkt S schneiden, und berechnen Sie die Koordinaten von S.

c) Berechnen Sie die Länge des Tunnels.

d) Zeichnen Sie den Verlauf des Tunnels gestrichelt in die Karte aus Aufgabe a) ein.

e) Der von P ausgehende Tunnelstollen schliesst mit der Horizontalebene den Neigungswinkel $\varphi$ ein. Berechnen Sie $\varphi$, und geben Sie auch an, vor wie vielen Prozenten Steigung ein Strassenschild am Tunneleingang in P warnen muss.

f) Um die Bauarbeiten zu erleichtern, soll ein Hilfsstollen gebohrt werden. Dieser soll von R(6.4|0|1.6) aus auf kürzestem Weg zum von P ausgehenden Tunnelstollen führen. In welche Richtung muss von R aus gebohrt werden? Geben Sie einen Vektor mit ganzzahligen Komponenten an!

**Aufgabe 2** Analysis (1.5 + 3.5 + 1 + 3 + 4 + 2.5 + 1.5 = 17 Punkte)

Gegeben ist die Polynomfunktion f vom 3. Grade mit der Gleichung

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x^2 - \frac{53}{4}x - 42.$$

a) Berechnen Sie die 1. Ableitungsfunktion $f'$ und die 2. Ableitungsfunktion $f''$ von f.

b) Zeichnen Sie die Graphen von f, $f'$ und $f''$ qualitativ richtig in das vorgegebene Koordinatensystem (siehe Beiblatt).

c) Welche geometrische Bedeutung hat das Extremum der 1. Ableitungsfunktion $f'$? Beschreiben Sie kurz und präzise!

d) Berechnen Sie die durchschnittliche Steigung des Graphen von f im Intervall $[-8;-6]$ sowie die momentane Steigung an der Stelle x = –8. Unter welchem Winkel $\varphi$ schneidet der Graph von f die x-Achse an der Stelle x = –8?

e) Die Graphen von f, $f'$ und $f''$ schliessen sechs Flächenstücke ein. Berechnen Sie den Inhalt des grössten Flächenstückes, das von allen drei Graphen umschlossen wird.

f) Der Graph von $f''$ rotiert von seiner Nullstelle bis zur Stelle x = 6 um die x-Achse. Wie heisst der Körper, der dabei entsteht? Weisen Sie algebraisch nach, dass sein Volumen exakt $\frac{2662}{9}\cdot\pi$ beträgt.

g) Nun rotiert der Graph von f zwischen den beiden Nullstellen auf der negativen x-Achse um dieselbe. Berechnen Sie das Volumen V des dabei entstehenden Rotationskörpers.

**Aufgabe 3** Folgen und Reihen (2 + 4 + 4 + 2 = 12 Punkte)

Die Aufgaben 3.1 und 3.2 sind voneinander unabhängig.

3.1 Die xy-Ebene wird durch 18 Strahlen, die vom Ursprung O(0|0) ausgehen, in 18 gleiche Winkelfelder unterteilt. Der Punkt $P_1$ liegt auf dem ersten Strahl (x-Achse) mit $\overline{OP_1} = 10$. Ein Punkt $P_2$ auf dem zweiten Strahl wird so gewählt, dass der Winkel $\gamma_1 = \sphericalangle(OP_1P_2) = 50°$ beträgt. Ein Punkt $P_3$ auf dem dritten Strahl wird so gewählt, dass der Winkel $\gamma_2 = \sphericalangle(OP_2P_3) = 50°$ beträgt, usw. ohne Ende.

a) Zeichnen Sie den Streckenzug von $P_1$ bis $P_4$.

b) Berechnen Sie die Länge des nicht abbrechenden Streckenzuges $P_1, P_2, P_3, \ldots$

3.2 Ein Gefäss von 100 ℓ Inhalt ist mit 80-prozentigem Alkohol gefüllt.

a) Wie viele Liter reinen Alkohols sind noch im Gefäss, nachdem man 10-mal hintereinander 2 ℓ der vorhandenen Flüssigkeit abgeschöpft und dafür jedes Mal 2 ℓ reines Wasser hinzugefügt hat?

b) Wie oft muss man mindestens in dieser Weise abschöpfen, wenn der Alkoholgehalt höchstens 30 % betragen soll?

**Aufgabe 4** Wahrscheinlichkeit (2 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2 + 4 = 15 Punkte)

Für die Organisation des Sporttags am GB melden sich 3 SchülerInnen aus den 3. Klassen, 6 aus den 4. Klassen und 4 aus den 5. Klassen.

Von diesen müssen an der Besprechung mit den Sportlehrkräften 2 SchülerInnen teilnehmen. Sie werden zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit (WK), dass

a) beide SchülerInnen aus den 5. Klassen sind,

b) beide SchülerInnen aus verschiedenen Klassenstufen sind.

Für eine Fotografie stellen sich alle SchülerInnen, die sich gemeldet haben, in einer Reihe auf.

c) Wie viele Anordnungen gibt es, wenn nur die Zugehörigkeit zur Klassenstufe eine Rolle spielt?

d) Wie gross ist die WK, dass die SchülerInnen folgende Aufstellung haben:

5544433344455 ?

(5 bedeutet eine SchülerIn aus den 5. Klassen etc.)

Beim 100m-Final tragen die Läufer die Startnummern 1 bis 9.

e) Wie gross ist die WK, dass die drei Medaillengewinner Startnummern tragen, die durch 2 teilbar sind?

f) Wie gross ist die WK, dass von den Medaillengewinnern aus e) derjenige mit der kleinsten Startnummer Platz eins und der mit der grössten Startnummer Platz drei erreicht?

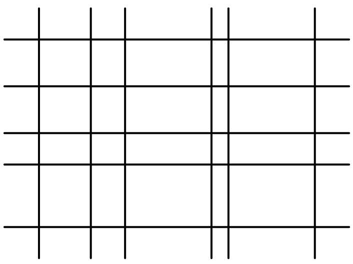
Beim Bogenschiessen treten 3 Schülerinnen an. Ariane trifft das Zentrum der Scheibe (also die innerste Kreisfläche) mit der WK 50%, Beatrice mit 30% und Christine mit 25%. Sie schiessen in der Reihenfolge A, B, C, A, B, C, usw. Siegerin ist diejenige Schülerin, die als erste das Zentrum trifft.

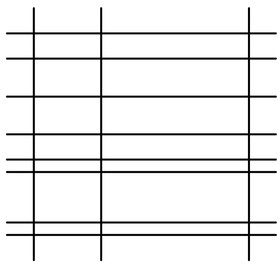
g) Wie gross ist die WK, dass Beatrice gewinnt?

**Aufgabe 5** Kurzprobleme (3.5 + 2.5 + 2.5 + 3.5 = 12 Punkte)

Die Aufgaben 5.1 und 5.2 sind voneinander unabhängig.

5.1 Mit 11 Geraden, davon 5 horizontal und 6 vertikal, lassen sich 20 rechteckige, sich nicht überlappende Zellen bilden (vgl. linkes Bild). Man hätte mit 8 waagrechten und 3 senkrechten aus diesen 11 Geraden auch 14 Zellen bilden können (siehe rechtes Bild).





a) Wie viele rechteckige Zellen kann man maximal mit 19 Geraden auf diese Art bilden? Die Antwort ist zu begründen!

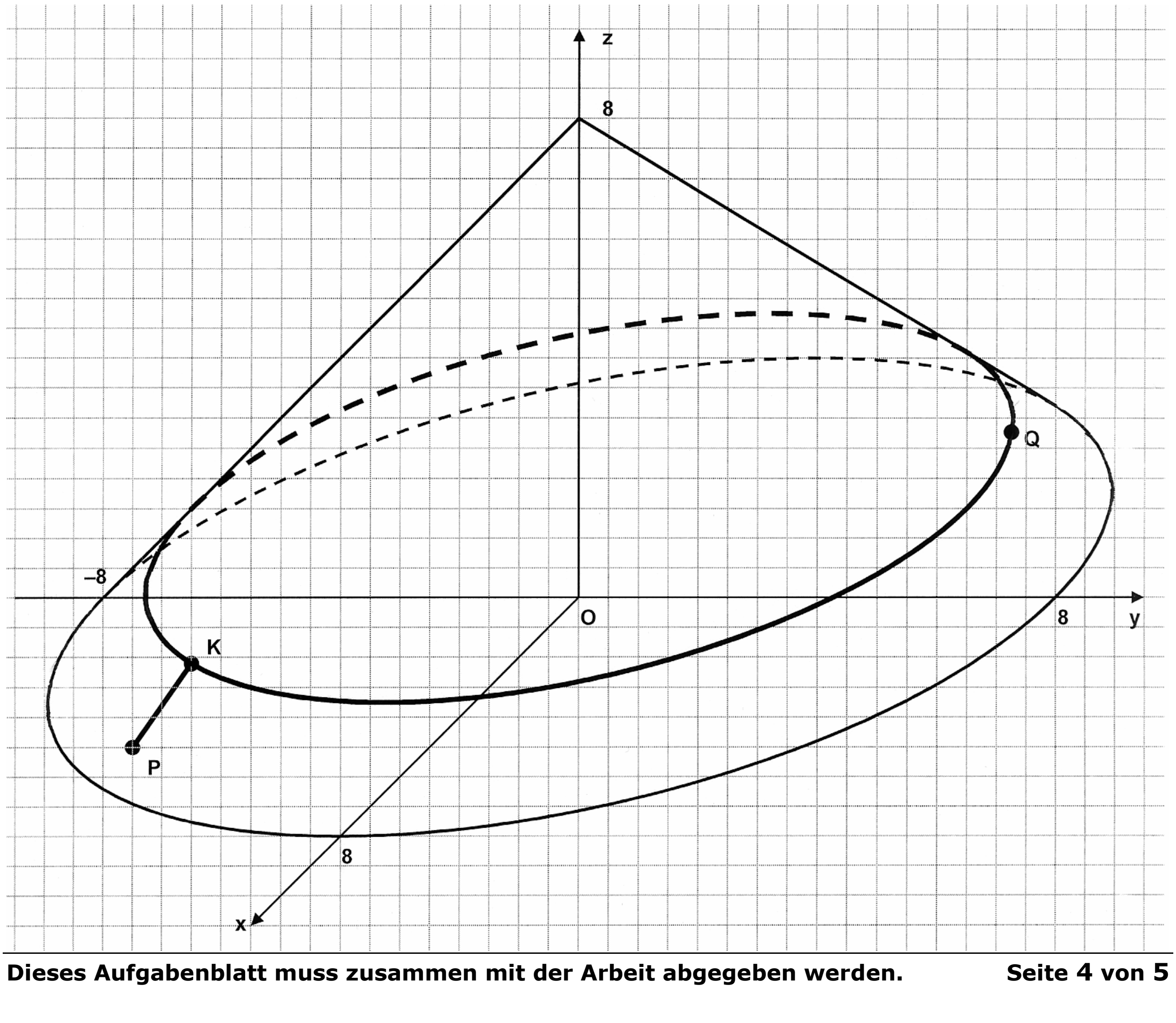
b) Verallgemeinern Sie die Aufgabe auf n gegebene Geraden, wovon w waagrecht und s senkrecht verlaufen. Berechnen Sie die maximale Anzahl Zellen, die man mit diesen n Geraden bilden kann (als Funktion von n).

5.2 In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basis 7.0 cm und die Schenkel 12.0 cm lang.

a) Konstruieren Sie das Dreieck, seinen Inkreis und seinen Umkreismittelpunkt M. Die Konstruktionslinien müssen ersichtlich sein.

b) Überprüfen Sie rechnerisch, ob M auf dem Inkreis liegt oder nicht.

**Illustration der Aufgabe 1**



**Beiblatt zu Aufgabe 2b)**