Fach Mathematik
Klassen alle 5. Klassen

Dauer der Prüfung: 4 Std.
Erlaubte Hilfsmittel: Fundamentum Mathematik und Physik
Taschenrechner TI-83 Plus inkl. Applikation CtlgHelp

Vorbemerkungen:

1. Ergebnisse ohne Begründung werden nicht bewertet.
2. Jede Aufgabe muss auf ein separates Blatt gelöst werden. Teilaufgaben sind deutlich zu nummerieren.
3. Es können maximal 73 Punkte erreicht werden. Für die Note 6 genügen 66 Punkte.

Viel Erfolg wünschen Urs Handschin, Helmut Locher, Philippe Meili und Andreas Stahel!

Aufgabe 1 Raumgeometrie (1.5 + 3 + 4 + 2.5 + 1 + 3 = 15 Punkte)

Die Figur 1 (vgl. Beiblatt) besteht aus einem Quader und einer darauf aufgesetzten geraden Pyramide. Der Quader steht auf der x-y-Ebene. Damit ergeben sich folgende Koordinaten: $A(3/-4/0)$, $B(-3/4/10)$, $C(-3/4/2)$, $S(0/0/9)$.

a) Bestimme die Länge der Pyramidenkante k!

b) Durch die Punkte A und B wird die Gerade g gelegt. Berechne, in welchem Punkt P die Gerade g den Boden der Pyramide durchstösst!

c) Die Gerade g schneidet die Pyramidenkante k. Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes Q!

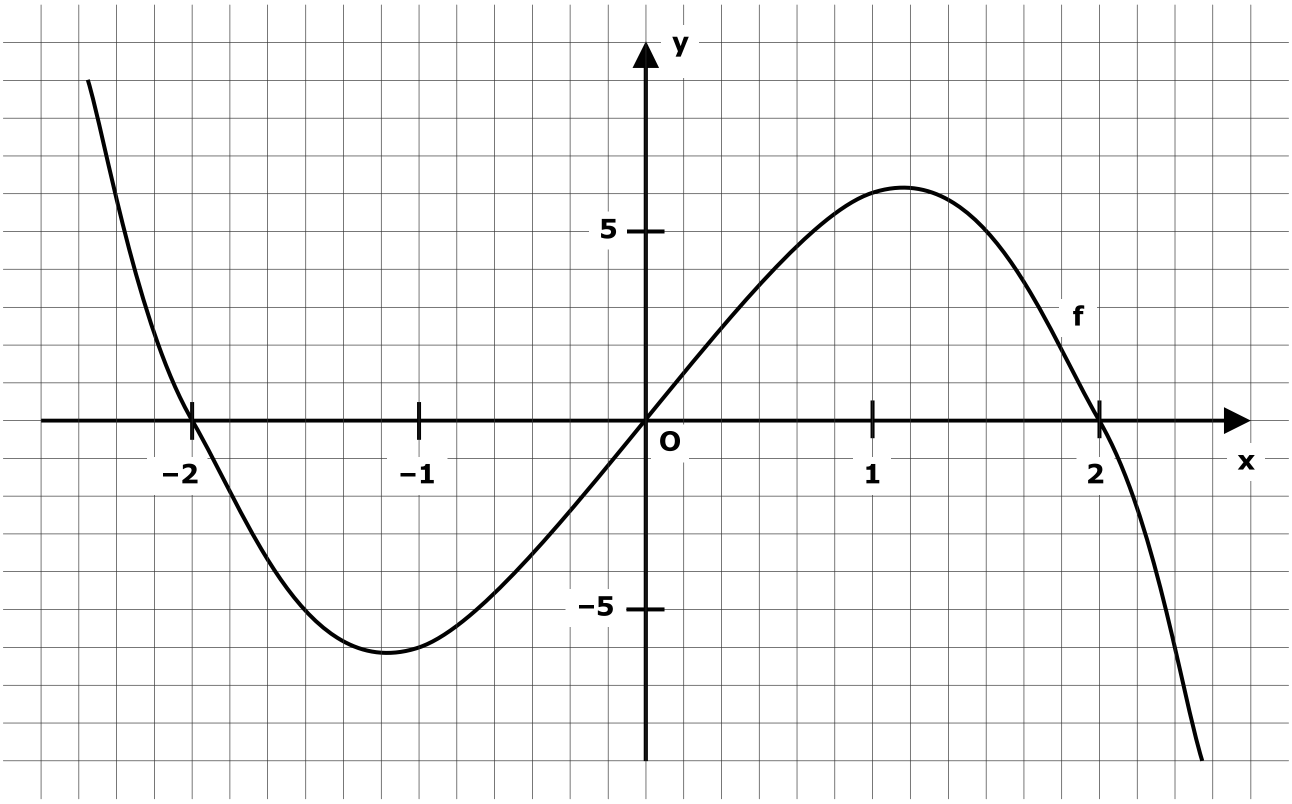
d) Unter welchem Winkel φ schneidet die Gerade g die Kante k im Punkt Q?

e) Die Gerade h ist parallel zur Geraden g und geht durch die Pyramidenspitze S. Wie lautet eine Geradengleichung von h?

f) Welchen Abstand d haben die Geraden g und h voneinander?

Aufgabe 2 Analysis (5 + 3 + 3 + 2.5 + 3.5 = 17 Punkte)

Gegeben ist die Polynomfunktion f vom 3. Grade mit der Gleichung $f(x) = -2x^3 + 8x$ sowie ihr Graph im Koordinatensystem:



a) Weise ohne Taschenrechner nach, dass die Funktion f die in der Graphik ersichtlichen Nullstellen hat!

Bestimme die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Wendepunkt und zeichne diese Tangente ins Koordinatensystem ein!

Berechne den gesamten Inhalt der Fläche A, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird!

b) Dem Flächenstück A_1, das vom Graphen von f und der x-Achse im 1. Quadranten begrenzt wird, soll ein bei C rechtwinkliges Dreieck OCD mit maximalem Flächeninhalt einbeschrieben werden. Dabei ist O(0/0) der Nullpunkt, C ein auf der x-Achse und D ein auf dem Graphen von f liegender Punkt.

Berechne die x-Koordinate des Punktes C und den maximalen Flächeninhalt!

c) Die Gerade h mit der Gleichung h: y = 2x teilt das Flächenstück A_1 (vgl. Aufgabe b)) in zwei Teile: ein oberes Flächenstück A_o und ein unteres Flächenstück A_u. Berechne das Verhältnis $A_o : A_u$ und gib es mit kleinstmöglichen ganzen Zahlen an!

d) Das Flächenstück A_o aus Aufgabe c) rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen V des dabei entstehenden Rotationskörpers!

Fertige von diesem Rotationskörper eine separate Handskizze auf deinem Blatt an!

e) Nun soll das Flächenstück A_1 (vgl. Aufgabe b)) durch eine Ursprungsgerade g mit der Gleichung g: y = m · x halbiert werden. Bestimme die Gleichung dieser Geraden g!

Aufgabe 3 Wahrscheinlichkeitsrechnung (1.5 + 1.5 + 2 + 1.5 + 3.5 + 4 = 14 Punkte)

Im letztjährigen Skilager traten allerlei mathematische Probleme auf.

Im Speisesaal gab es 9 Tische.

a) Der Lehrer kaufte für jeden Tisch etwas Süsses. 4 Gläser Nuss-Nougat-Creme, 3 Gläser Marmelade und 2 Gläser Honig. Auf wie viele Arten konnten die Gläser verteilt werden, wenn auf jeden Tisch ein Glas kommen sollte und Gläser von der gleichen Art nicht unterscheidbar waren?

b) Florian hatte am 1. Tag ein Marmeladeglas auf dem Tisch. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass er am 2. Tag ebenfalls ein Marmeladeglas haben wird?

c) Als Melanie die Tische zum Frühstücken decken musste, nahm sie zufällig vier der neun Gläser in die Hände. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Honiggläser dabei waren?

Vor dem Skilager informierten sich die Leiter aus verschiedenen Quellen über das Wetter am Lagerort.

d) Ein Wetterbericht sagte, die Wahrscheinlichkeit, dass es schneien werde, sei in dieser Woche an jedem Tag 50 %. Nun sind schon drei Tage ohne Schnee vergangen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in den verbleibenden zwei Tagen noch an mindestens einem Tag Schnee geben wird?

e) Ein anderer, wissenschaftlicher Wetterbericht meinte, wenn es schneie, dann werde der Luftdruck mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 % steigen. Andererseits, wenn es nicht schneie, dann werde der Luftdruck mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % nicht steigen.

   i) Durch statistische Untersuchungen weiss man, dass es am Donnerstag mit einer Wahrscheinlichkeit von 55 % zu schneien beginnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird am Donnerstag der Luftdruck steigen?

   ii) Am Donnerstagmorgen sieht der Lehrer, dass der Luftdruck steigt. Wie hoch ist unter dieser Bedingung die Wahrscheinlichkeit, dass es schneien wird?

Am Abend gab es keine andere Möglichkeit, als die Zeit mit Spielen zu vertreiben.

f) Peter meinte zu Paul: „Wir setzen beide einen Franken und würfeln. Wer die höhere Zahl hat, gewinnt und bekommt beide Franken. Sollten beide Würfel die gleiche Zahl zeigen, würfeln wir einfach gleich noch einmal.“ Peter nahm einen normalen Spielwürfel, während Paul ein Oktaeder mit den Zahlen 1 bis 8 in der Spielsammlung fand. Das fand Peter weniger lustig.

   Wie muss man Peters und Pauls Einsatz (auf Rappen genau) ändern, damit das Spiel fair ist und die Summe der Einsätze weiterhin 2 Franken beträgt?

Aufgabe 4 Schnittwinkel (5 + 2 = 7 Punkte)

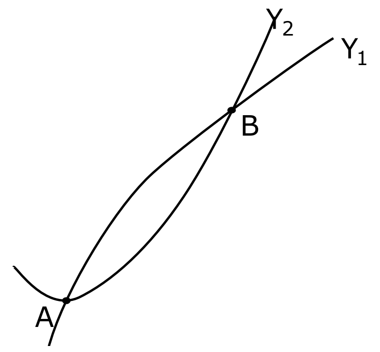
a) In der nebenstehenden Figur 4a) sind die Graphen der Funktionen mit den Termen

$$Y_1 = 9 \cdot \sqrt{\frac{x}{2} + 1} - 14 \qquad \text{und} \qquad Y_2 = \frac{1}{4} \cdot x^2 - 5$$

dargestellt. (Das Koordinatensystem ist nicht gezeichnet.) Sie begrenzen ein wie ein (pflanzliches) Blatt aussehendes zweieckiges Gebiet.

Ermittle die Koordinaten der Ecken A und B sowie die zugehörigen Winkel α und β dieses Zweiecks!

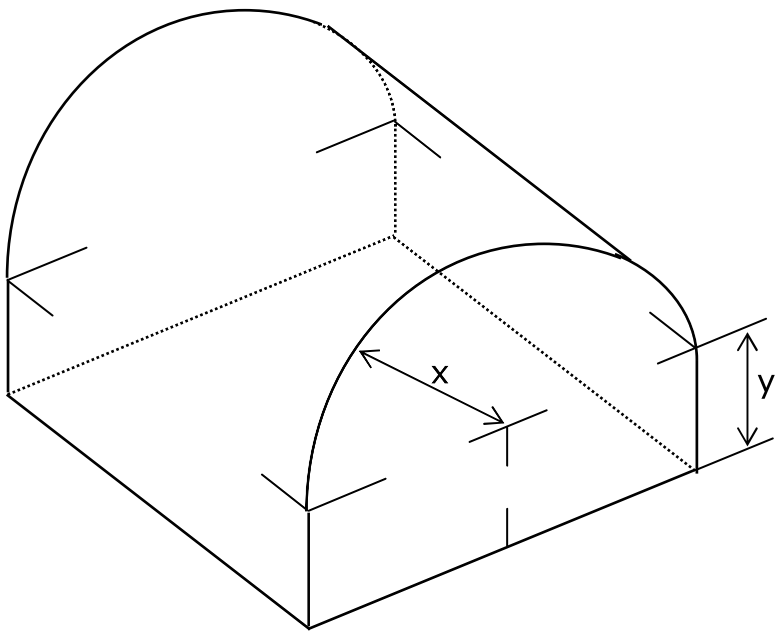
Figur 4a)



b) Für welche Werte von a schneiden sich die Graphen der Funktionen $Y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ und $Y_2 = a \cdot x$ rechtwinklig?

(Hinweis: Die Teilaufgabe b) ist mit ganz wenig Rechenaufwand lösbar.)

Aufgabe 5 Wasserbehälter (2.5 + 4.5 = 7 Punkte)

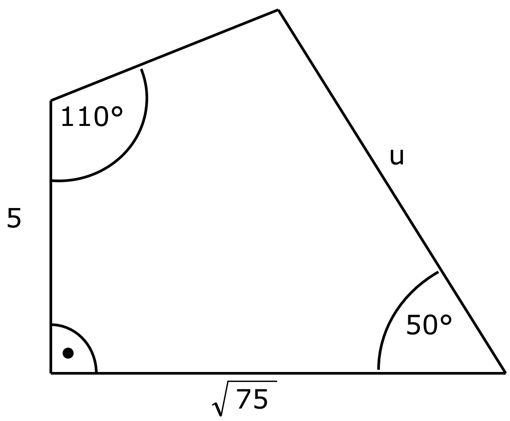


Die Figur zeigt einen allseitig geschlossenen Wasserbehälter, der von unendlich dünnen Metallflächen berandet wird. Sein unterer Teil ist ein Quader mit quadratischer Grundfläche, während sein oberer Teil ein Halbzylinder ist.

a) Berechne das Volumen V und die Oberfläche F des Behälters für x = 3 und y = 2 !

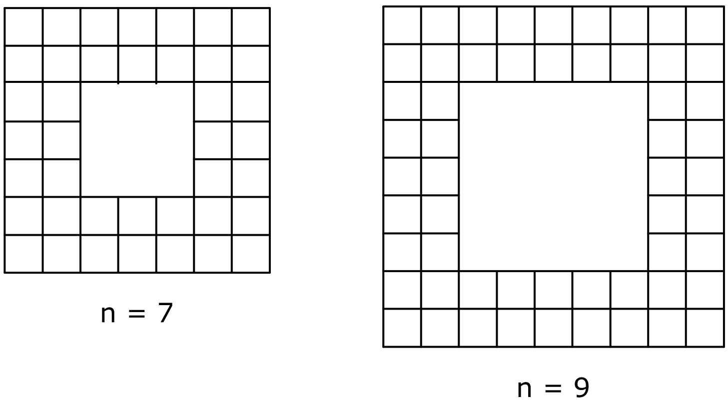
b) Es gibt unendlich viele Behälter der gezeichneten Art, welche das Volumen V = 100 besitzen. Unter diesen ist derjenige zu finden, für dessen Herstellung möglichst wenig Metall gebraucht wird. Gib für diesen Behälter die Werte von x, y und F an!

Aufgabe 6 Unbekannte Viereckseite (5 Punkte)



Berechne die Länge der mit u bezeichneten Viereckseite!

Aufgabe 7 Streichhölzchen-Bilderrahmen (1 + 2 + 2 + 3 = 8 Punkte)



In den Figuren sind zwei Beispiele von aus Streichhölzchen gebildeten „Bilderrahmen" gezeigt. Die Rahmendicke beträgt immer 2 Streichhölzchenlängen. Die Anzahl der an einer äusseren Seite liegenden Hölzchen sei n, die Anzahl aller Hölzchen heisse h.

a) Wie gross ist h, falls n = 9 ist?

b) Wie gross ist h, falls n = 900 ist?

c) Wie gross ist n, falls h = 900 ist?

d) Wie viele aus Streichhölzchen gebildete Quadrate sind im "Bilderrahmen" für n = 9 enthalten?

(Beachte: Hier sind nicht nur die kleinen Quadrate, also diejenigen vom Format 1 X 1, zu zählen, sondern auch alle grösseren der Formate 2 X 2, 3 X 3, etc. soweit solche auftreten.)

Beiblatt Figur 1