Aufgabe 1 Raumgeometrie — 13 P.

a) (2 P.)

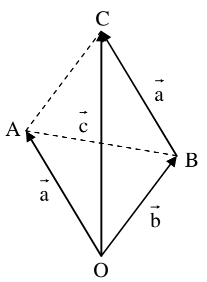
$$g:\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2-7 \\ 11-2 \\ 6-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \textit{(z.B.)}$$ *(0.5 P.)*

P in x-z-Ebene $\Rightarrow$ $y = 0$
y in g einsetzen: $0 = 2 + 9s \Rightarrow s = -\frac{2}{9} = -0.\overline{2}$
s in g einsetzen: $x = 7 - 5s = \frac{73}{9} = 8.\overline{1}$
$z = 12 - 6s = \frac{120}{9} = 13.\overline{3}$
$\Rightarrow$ $\underline{\underline{P(8.\overline{1}/0/13.\overline{3})}}$ *(1 P.)*

Q in y-z-Ebene $\Rightarrow$ $x = 0$
x in g einsetzen: $0 = 7 - 5s \Rightarrow s = 1.4$
s in g einsetzen: $y = 2 + 9s = 14.6$
$z = 12 - 6s = 3.6$
$\Rightarrow$ $\underline{Q(0/14.6/3.6)}$ *(0.5 P.)*

(Bemerkung: Der Spurpunkt S(–3/20/0) der x-y-Ebene ist nicht sichtbar. Erkennbar durch grobe Skizze oder Rechnung.)

b) (1 P.)



$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 18 \end{pmatrix}$$ *(0.5 P.)*

$\Rightarrow$ $\underline{C(9/13/18)}$ *(0.5 P.)*

c)

Rhombus:

Kriterium: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ *(0.5 P.)*

Test: $|\vec{a}| = \sqrt{7^2 + 2^2 + 12^2} = \sqrt{197} = 14.035668\ldots$

$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 11^2 + 6^2} = \sqrt{161} = 12.688577\ldots$ *(0.5 P.)*

$\Rightarrow\ |\vec{a}| \neq |\vec{b}|\ \Rightarrow$ AOBC ist <u>kein Rhombus</u>. *(0.5 P.)*

Rechteck:

Kriterium: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 90°$ *(0.5 P.)*

Test: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = 14 + 22 + 72 = 108 \neq 0$ *(0.5 P.)*

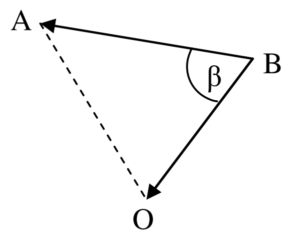
$\Rightarrow$ AOBC ist <u>kein Rechteck</u>. *(0.5 P.)*

(Bemerkung: $\varphi = 52.668485\ldots° \approx 52.67°$)

3 P.

d)

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BO} = -\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix}$$



$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BO}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BO}|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix}}{\sqrt{5^2 + (-9)^2 + 6^2} \cdot \sqrt{161}}$$

$$= \frac{-10 + 99 - 36}{\sqrt{142}\cdot\sqrt{161}} = \frac{53}{\sqrt{22862}} = 0.350524\ldots$$

$\Rightarrow\ \beta = 69.480581\ldots° \approx \underline{\underline{69.48°}}$

2 P.

e)

$A_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\cdot \overline{AB}\cdot\overline{BO}\cdot\sin\beta$

$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{142}\cdot\sqrt{161}\cdot\sin 69.480581\ldots° = 70.804307\ldots \approx \underline{\underline{70.80}}$

<u>Variante 1:</u>

Zuerst eine Höhe berechnen:

$h_{OB} = \overline{AB}\cdot\sin\beta = 11.160332\ldots$ oder $h_{AB} = \overline{OB}\cdot\sin\beta = 11.883531\ldots$

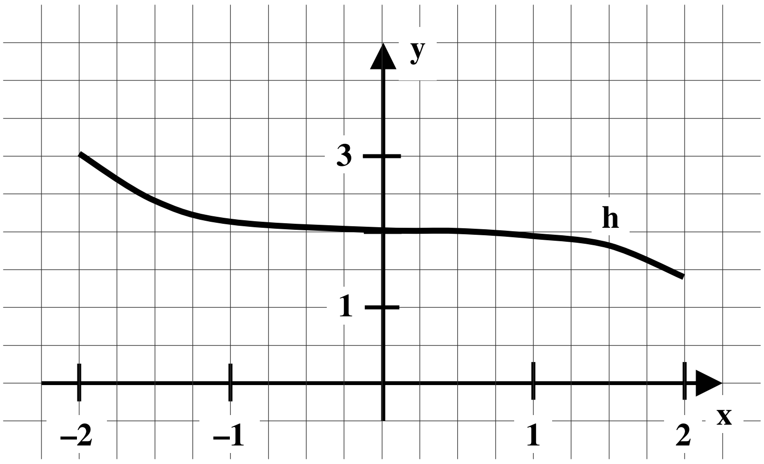
Dann: $A_\Delta = \frac{\overline{AB}\cdot h_{AB}}{2} = \frac{\overline{OB}\cdot h_{OB}}{2}$

<u>Variante 2:</u>

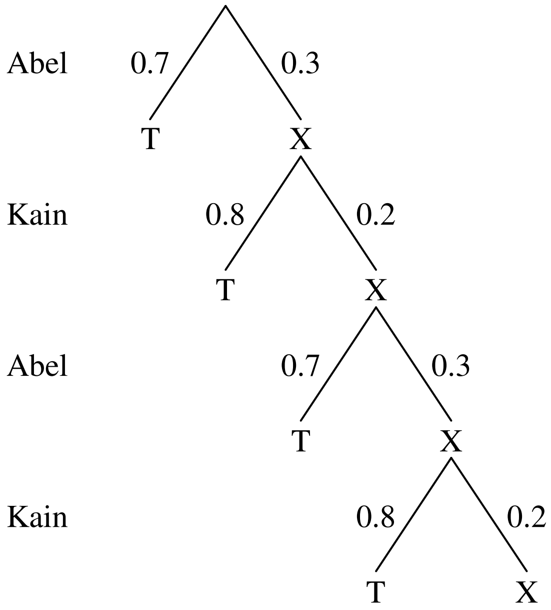
h_{AB} als Extremwertproblem berechnen (siehe f) Variante; hier aufwändiger, dafür dann bei f) schneller).

2 P.

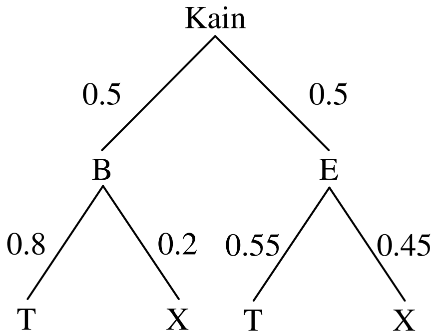
f)	Kriterium: $\overrightarrow{\tilde{B}A}\cdot\overrightarrow{\tilde{B}O}=0$ *(0.5 P.)* $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{O\tilde{B}}=0$, weil $\overrightarrow{\tilde{B}A} \parallel \overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{\tilde{B}O} \parallel \overrightarrow{O\tilde{B}}$ $\tilde{B}$ liegt auf g, also gilt: $\tilde{B}\,(7-5s\,/\,2+9s\,/\,12-6s)$ *(0.5 P.)* $\overrightarrow{O\tilde{B}}=\begin{pmatrix}7-5s-0\\2+9s-0\\12-6s-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7-5s\\2+9s\\12-6s\end{pmatrix}$ *(0.5 P.)* $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{O\tilde{B}}=\begin{pmatrix}5\\-9\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7-5s\\2+9s\\12-6s\end{pmatrix}$ $=5(7-5s)-9(2+9s)+6(12-6s)$ *(0.5 P.)* $=35-25s-18-81s+72-36s$ $=89-142s=0$ $\Rightarrow$ s = $\frac{89}{142}$ = 0.626… *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ $\tilde{B}$ (3.866197…/7.640845…/8.239436…) ≈ $\underline{\underline{\tilde{B}}}$ <u>(3.87/7.64/8.24)</u> *(0.5 P.)* <u>Variante mit $\overrightarrow{\tilde{B}A}\cdot\overrightarrow{\tilde{B}O}=0$:</u> $\overrightarrow{\tilde{B}A}=\begin{pmatrix}-5s\\9s\\-6s\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{\tilde{B}O}=-\overrightarrow{O\tilde{B}}=\begin{pmatrix}-7+5s\\-2-9s\\-12+6s\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{\tilde{B}A}\cdot\overrightarrow{\tilde{B}O}=-142s^2+89s=0$ $\Rightarrow$ s_1= 0 ($\Rightarrow$ $\tilde{B}$ = A, unsinnig), s_2 = $\frac{89}{142}$ = 0.626… wie oben <u>Variante mit Extremwertproblem:</u> β = 90° $\Rightarrow$ $\overline{Og}=\overline{O\tilde{B}}=\overline{\tilde{B}O}$ muss minimal werden! $\overline{\tilde{B}O}=\sqrt{(-7+5s)^2+(-2-9s)^2+(-12+6s)^2}$ $\Rightarrow$ minimalisieren mit *minimum* $\Rightarrow$ x = s = $\frac{89}{142}$ = 0.626… wie oben	3 P.

Aufgabe 2	Differentialrechnung	10 P.
a)	z.B. mit *table*: A(–2/3.044), B(–1/2.162), C(0/2), D(1/1.958), E(2/1.436) 	2 P.
b)	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.436 - 3.044}{2 - (-2)} = \frac{-1.608}{4} = \underline{\underline{-0.402}}$	1 P.
c)	$\underline{\underline{h'(x) = -0.3x^2 + 0.12x - 0.002}}$ *(1 P.)* $\underline{\underline{h''(x) = -0.6x + 0.12}}$ *(1 P.)*	2 P.
d)	mit *dy/dx* oder einsetzen: $\underline{\underline{h'(-2) = -1.442}}$ *(1 P.)* $\varphi = \lvert\tan^{-1}(-1.442)\rvert = 55.259416\ldots° \approx \underline{\underline{55.26°}}$ *(1 P.)*	2 P.
e)	Kriterium: $h'(x) = -0.09$ *(0.5 P.)* mit *graph* und *intersect* oder *solver*: $x_1 = -0.377350\ldots \approx \underline{\underline{-0.38}}$, $x_2 = 0.777350 \approx \underline{\underline{0.78}}$ *(1 P.)*	1.5 P.
f)	$h'(x)$ muss maximal werden. Mit *maximum*: Stelle: $\underline{\underline{x_{max} = 0.2}}$ *(0.5 P.)* Steigung: $\underline{\underline{h'(x_{max}) = 0.01}}$ *(0.5 P.)* Bedeutung: <u>Es geht leicht bergauf!</u> *(0.5 P.)*	1.5 P.

Aufgabe 3 Integralrechnung		5 P.
a)	$A_{Schnee} = A_\Delta + A_\cup + A_\Delta$ $A_\cup = \int_{-5}^{5}\left(\frac{1}{125}x^4+2\right)dx = 30$ (mit $\int f(x)dx$ oder *fnint*) *(0.5 P.)* $A_\Delta = \frac{2\cdot 7}{2} = 7$ (rechtwinkliges Dreieck!) *(0.5 P.)* $\Rightarrow A_{Schnee} = 7 + 30 + 7 = 44\ m^2$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow V_{Schnee} = A_{Schnee} \cdot \ell = 44 \cdot 100 = \underline{\underline{4'400\ m^3}}$ (Prisma!) *(0.5 P.)* <u>Variante:</u> Symmetrie bzgl. y-Achse ausnützen.	2 P.
b)	$A_{Schnee} = \frac{V_{Schnee}}{\ell} = \frac{3400}{100} = 34\ m^2$ *(0.5 P.)* Wegen Symmetrie gilt für die rechte Hälfte der Halfpipe: $\frac{A_{Schnee}}{2} = A_{\cup/2} + A_\Delta$ *(0.5 P.)* $17 = \int_{0}^{x}\left(\frac{1}{125}x^4+2\right)dx + \frac{(7-x)\cdot\left(\frac{1}{125}x^4+2\right)}{2}$ *(1 P.)* mit *graph* und *intersect* oder *solver*: $x = 4.239891\ldots$ *(0.5 P.)* mit *trace* oder *value*: $h = y = 4.585289\ldots \approx \underline{\underline{4.59\ m}}$ *(0.5 P.)*	3 P.

Aufgabe 4	Wahrscheinlichkeitsrechnung	13 P.
a)	Abel: $P(T) = 0.7$, $P(X) = 0.3$ $P(1xT) = P(T) \cdot P(X) + P(X) \cdot P(T)$ $= 0.7 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.7 = 0.42 = \underline{\underline{42\ \%}}$	1 P.
b)	Kain: $P(T) = 0.8$, $P(X) = 0.2$ $P(\text{mind. } 1xT) = 1 - P(\text{kein } T) = 1 - 0.2 \cdot 0.2 = 0.96 = \underline{\underline{96\ \%}}$ <u>Variante ohne Gegenereignis:</u> $P(\text{mind. } 1xT) = P(1 \text{ x } T) + P(2xT) = 2 \cdot (0.8 \cdot 0.2) + 0.8 \cdot 0.8$	1 P.
c)	 *(1 P.)* $P(\text{Abel gewinnt}) = 0.7 + 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.7$ $= 0.7 + 0.042 = 0.742 = \underline{\underline{74.2\ \%}}$ *(1 P.)*	2 P.
d)	$P\ (\text{Kain gewinnt}) = 0.3 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.8$ $= 0.24 + 0.0144 = 0.2544 = \underline{\underline{25.44\ \%}}$ <u>Variante mit Gegenereignis:</u> $P\ (\text{Kain gewinnt}) = 1 - P(\text{Abel gewinnt}) - P(\text{keiner gewinnt})$	1 P.

e)



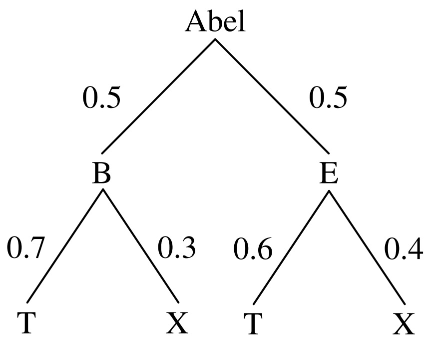
<u>Variante:</u>
Vierstufiges Baumdiagramm
mit 2 günstigen Pfaden
(BTET und ETBT)

(0.5 P.) — 2 P.

$P(1) = P(BT) = 0.5 \cdot 0.8 = 0.4$
$P(2) = P(ET) = 0.5 \cdot 0.55 = 0.275$ *(0.5 P.)*
$P(0) = P(BX) + P(EX) = 0.5 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.45 = 0.325$

$$\begin{aligned} P(3) &= P(2{+}1) + P(1{+}2) \\ &= P(2) \cdot P(1) + P(1) \cdot P(2) && \textit{(0.5 P.)} \\ &= 0.275 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.275 \\ &= 0.11 + 0.11 = 0.22 = \underline{\underline{22\ \%}} && \textit{(0.5 P.)} \end{aligned}$$

f)



<u>Variante:</u>
Vierstufiges Baumdiagramm
mit 3 günstigen Pfaden
(ETBX, BXET und BTBT)

(0.5 P.) — 3 P.

$P(1) = P(BT) = 0.5 \cdot 0.7 = 0.35$
$P(2) = P(ET) = 0.5 \cdot 0.6 = 0.3$
$P(0) = P(BX) + P(EX) = 0.5 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.4 = 0.35$ *(1 P.)*

$$\begin{aligned} P(2) &= P(2{+}0) + P(0{+}2) + P(1{+}1) \\ &= P(2) \cdot P(0) + P(0) \cdot P(2) + P(1) \cdot P(1) && \textit{(1 P.)} \\ &= 0.3 \cdot 0.35 + 0.35 \cdot 0.3 + 0.35 \cdot 0.35 \\ &= 0.105 + 0.105 + 0.1225 = 0.3325 = \underline{\underline{33.25\ \%}} && \textit{(0.5 P.)} \end{aligned}$$

g)

<u>Abel</u>	<u>Kain</u>
2	0 oder 1
1	0
0	nicht möglich

<u>Variante:</u>
Vierstufiges Baumdiagramm mit
5 günstigen Pfaden (A[ET]K[BT],
A[ET]K[BX], A[ET]K[EX],
A[BT]K[BX], A[BT]K[EX]) *(1 P.)*

3 P.

$$\begin{aligned} P(A{>}K) &= P(\text{Abel } 2) \cdot \{P(\text{Kain } 0) + P(\text{Kain } 1)\} + P(\text{Abel } 1) \cdot P(\text{Kain } 0) \\ &= 0.3 \cdot \{ 0.325 + 0.4 \} + 0.35 \cdot 0.325 \\ &= 0.2175 + 0.11375 \\ &= 0.33125 = \underline{\underline{33.125\ \%}} && \textit{(2 P.)} \end{aligned}$$

Aufgabe 5 Folgen und Reihen		11 P.
a)	<u>Radius</u> — <u>Volumen</u> $r_n = r_{n-1} \cdot 0.8$ — $V_n = r_n^2 \cdot \pi \cdot 10$ $r_1 = 25$ cm — $V_1 = 19'634.95\ \text{cm}^3$ $r_2 = 20$ cm — $V_2 = 12'566.37\ \text{cm}^3$ $r_3 = 16$ cm — $V_3 = 8'042.48\ \text{cm}^3$ $\underline{\underline{r_4 = 12.8\ \text{cm}}}$ *(1 P.)* — $\underline{\underline{V_4 = 5'147.19\ \text{cm}^3}}$ *(1 P.)* $T_4 = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \underline{\underline{45'390.99\ \text{cm}^3}}$ *(1 P.)*	3 P.
b)	Radius: Geometrische Folge mit q = 0.8. $\underline{\underline{r_n}} = r_1 \cdot q^{n-1} = \underline{\underline{25 \cdot 0.8^{n-1}}}$ *(1 P.)* Volumen: r_n in Volumenformel einsetzen $\underline{\underline{V_n}} = r_n^2 \cdot \pi \cdot 10 = \underline{(25 \cdot 0.8^{n-1})^2 \cdot \pi \cdot 10} = \underline{\underline{6250\pi \cdot 0.8^{2n-2}}}$ *(1 P.)* <u>Variante:</u> Geometrische Folge mit $q = 0.64 = 0.8^2$ $\underline{\underline{V_n}} = V_1 \cdot q^{n-1} = \underline{\underline{19.634.95 \cdot 0.64^{n-1}}}$	2 P.
c)	Unendliche geometrische Reihe mit $h_1 = 10$ cm und $q = 0.8$: $H = \frac{h_1}{1-q} = \frac{10}{1-0.8} = \underline{\underline{50\ \text{cm}}}$	2 P.
d)	Kriterium (in cm): $10 \cdot 0.8^{n-1} = 0.3$ *(1 P.)* mit *graph* und *intersect* oder *solver* oder von Hand mit Logarithmen: n = 16.714359… *(0.5 P.)* ⇒ Es sind <u>maximal 16 Stockwerke</u> möglich. *(0.5 P.)* (Das 17. Stockwerk ist zu als erstes zu dünn.)	2 P.
e)	Endliche geometrische Reihe mit $n = 5$, $s_5 = 41$ cm und $a_1 = 10$ cm: $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \Rightarrow \quad 41 = 10 \cdot \frac{1-q^5}{1-q}$ *(1 P.)* mit *graph* und *intersect* oder *solver*: q = 0.900601… *(0.5 P.)* ⇒ 1 – q = 0.099398… ≈ $\underline{\underline{9.94\ \%}}$ *(0.5 P.)*	2 P.

Aufgabe 6 Pyramide		8 P.
a)	Einzeichnen der umgekehrten kleinen Pyramide Beschriftung der Deckfläche	2 P.
b)	Einzeichnen der vier kleinen Pyramiden *(1 P.)* Begründung für Volumengleichheit: • Das Volumen einer Pyramide berechnet sich als ein Drittel mal Grundfläche mal Höhe. • Alle fünf Pyramiden sind gleich hoch, nämlich halb so hoch wie die ursprüngliche Pyramide ABCDS. • Die Grundflächen der vier kleinen Pyramiden sind gemäss Vorgabe kongruent; sie sind jeweils ein Viertel des Quadrates ABCD. • Die Strecke $\overline{A'B'}$ liegt auf halber Höhe der Pyramide parallel zur Grundseite $\overline{AB}$ und ist somit wegen des Strahlensatzes halb so lang wie diese. $\overline{B'C'}$ etc. ebenso. Damit ist das Quadrat A'B'C'D' gleich gross wie das A-Quadrat und insbesondere ebenfalls ein Viertel des Quadrates ABCD. • Somit weisen alle fünf Pyramiden dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe auf, womit sie volumengleich sind. *(2 P.)*	3 P.
c)	Restkörper färben	1 P.
d)	grosse Pyramide = 6 kleine Pyramiden + 4 Restkörper *(0.5 P.)* $V_{PYR} = \frac{1}{3}a^2h$ $V_{pyr} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}a\right)^2 \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a^2\cdot\frac{1}{2}h = \frac{1}{24}a^2\cdot h$ $\Rightarrow \quad V_{pyr} = \frac{1}{8}V_{PYR}$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow \quad 6V_{pyr} = \frac{6}{8}V_{PYR} = \frac{3}{4}V_{PYR}$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow \quad 4V_{Rest} = \frac{1}{4}V_{PYR}$ $\Rightarrow \quad \underline{\underline{V_{Rest} = \frac{1}{16}V_{PYR}}}$ *(0.5 P.)* <u>Variante:</u> Berechnung mit Hilfe eines Zahlenbeispieles.	2 P.