Fach **Mathematik**
Klassen **5A, 5B, 5C, 5D, 5E, 5F, 5S**

Dauer der Prüfung: 4 Std.
Erlaubte Hilfsmittel: Fundamentum Mathematik und Physik
Taschenrechner TI-83 Plus inkl. Applikation CtlgHelp

Vorbemerkungen:

1. Die Lösungswege sind nachvollziehbar anzugeben. Ergebnisse ohne Begründung können mit 0 Punkten bewertet werden. Bei Lösungen mit dem Taschenrechner sind die entsprechenden Befehle (Listen, Solver, Calculate, nDerive und fnInt) „wörtlich“ anzugeben.
Lösungen als Dezimalzahlen sind auf 2 Nachkommastellen zu runden.
2. Jede Aufgabe muss auf ein separates Blatt gelöst werden. Teilaufgaben sind deutlich zu nummerieren.
3. Es können maximal 63.5 Punkte erreicht werden. Für die Note 6 genügen 50 Punkte.

Viel Erfolg wünschen Thomas Ahrend, Dieter Graber, Helmut Locher, Halina Michalski, Andreas Stahel und Bruno Zurfluh!

Aufgabe 1 Raumgeometrie (2 + 2.5 + 2.5 + 1 + 2 + 3 = 13 Punkte)

Ein junger Bogenschütze steht in einer Turnierhalle auf der Position P(6/4/0) (siehe Beiblatt! Alle Angaben sind in Metern zu verstehen). Seine Augen befinden sich auf der Höhe 1.5. Von diesem Ort aus schiesst er einen Pfeil entlang einer geradlinig angenommenen Bahn in der Richtung $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$ ab.

Der Pfeil durchstösst zwei aus Papier angefertigte, gleich grosse und parallel zur xz-Ebene stehende Wände A und B (vgl. das Beiblatt, auf dem die Wand A eingezeichnet ist).
Bei allen Konstruktionsaufgaben müssen die Konstruktionslinien deutlich erkennbar sein!

a) Zeichnen Sie die Flugbahngerade g des Pfeils auf dem Beiblatt. Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an.

b) Konstruieren Sie den Durchstosspunkt S_A von g mit der Papierwand A. Lesen Sie die Koordinaten von S_A ab und bestätigen Sie diese rechnerisch.

c) Wie weit von der Wand A entfernt muss die zweite Wand B platziert werden, falls der Durchstosspunkt S_B von g mit B die x-Koordinate 1.5 haben soll?
Bestimmen Sie die exakten Koordinaten von S_B.
Zeichnen Sie die Wand B an der richtigen Stelle auf dem Beiblatt ein.

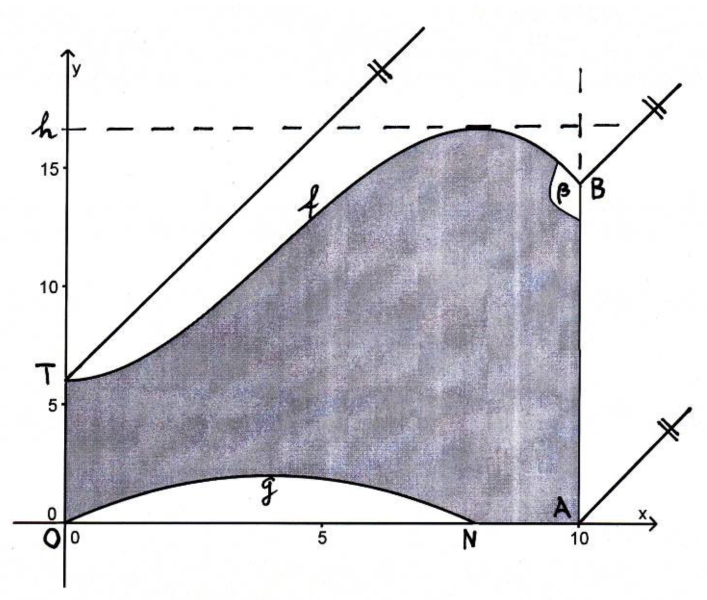
d) Heben Sie vom Standpunkt des Betrachters aus die Sichtbarkeit der geraden Flugbahn des Pfeiles vor und nach dem Durchstossen der beiden Wände farbig hervor.

e) Unter welchem Winkel φ zur xy-Ebene wird der Pfeil abgeschossen?

f) Ein Punkt D auf der y-Achse hat die gleiche Entfernung von den beiden Durchstosspunkten S_A und S_B. Berechnen Sie seine Koordinaten.

Aufgabe 2 Analysis (1 + 2 + 1.5 + 1 + 2.5 + 2.5 + 2.5 + 2.5 = 15.5 Punkte)

Eine Fräsmaschine soll aus einem 10 cm breiten und 2.5 m langen Vierkantholz mit rechteckigem Querschnitt ein Stück Zierleiste herstellen (vgl. die Skizze).



Die Querschnittsfläche der Zierleiste ist das Fünfeck ONABT. Der obere Rand wird durch die Funktion $f(x) = \frac{-1}{24}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6$, die untere krumme Randkurve durch die Funktion $g(x) = \frac{-1}{8}x^2 + x$ festgelegt.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion *g* gerade die Ableitungsfunktion von *f* ist.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Ecke B und den Winkel β bei dieser Ecke.

c) Welche Mindesthöhe *h* (vgl. Figur) muss das Vierkantholz aufweisen, damit die Zierleiste ausgefräst werden kann?

d) Berechnen Sie die durchschnittliche Steigung der oberen Randkurve zwischen dem Punkt T und dem Hochpunkt der Kurve.

e) Wo steigt die obere Randkurve am steilsten? Geben Sie die Koordinaten dieses Punktes an. Wie gross ist in diesem Punkt die Steigung?

f) Damit die Leiste genügend stabil ist, darf ihre Dicke, also der vertikale Abstand des oberen vom unteren Rand, 5.0 cm nicht unterschreiten. Klären Sie rechnerisch ab, ob diese Forderung erfüllt ist.

g) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes P, der auf der Kurve f und am nächsten beim Punkt N(8/0) liegt. Wie gross ist diese minimale Entfernung?

h) Berechnen Sie das Volumen *V* und die Masse *m* der Leiste, falls die Dichte des Holzes 580 kg/m^3 beträgt.

Aufgabe 3 Integralrechnung (5 + 6 = 11 Punkte)

Die zwei Aufgaben sind unabhängig von einander.
Beachten Sie das Beiblatt. Es darf zur Darstellung der Lösungen verwendet werden.

a) Flächenberechnung exakt
Bei dieser Aufgabe sollen Sie zeigen, dass Sie Flächen auch ohne die TI83-Befehle „fnInt(“ und „Calculate ∫f(x)dx“ berechnen können. Diese beiden Befehle dürfen für die Lösung der Aufgabe **nicht** verwendet werden, sondern allenfalls zur Kontrolle des Resultats. Alle andern Funktionen sind erlaubt.

Im ersten Quadranten schliessen die beiden Kurven mit den Gleichungen
f: $y = \frac{-20}{9}x^2 + \frac{40}{3}x + 1$ und g: $y = \frac{36}{x^2}$
ein Flächenstück ein. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt A exakt.

b) Flächenberechnung näherungsweise
Auch bei dieser Aufgabe dürfen die TI83-Befehle „fnInt(“ und „Calculate ∫f(x)dx“ nicht zur Lösung benützt werden, sondern allenfalls zur Kontrolle.
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen x-Achse, x = 1, x = 2 und der Kurve $y = \frac{1}{x}$
näherungsweise mit "Obersumme" und "Untersumme". Verwenden Sie als Intervallbreite $\Delta x = \frac{1}{250}$.
Geben Sie die verwendeten TR-Befehle "wörtlich" an. Warum ergibt die Differenz zwischen Ober- und Untersumme ein so "glattes" Resultat? Erklären Sie, warum der Mittelwert von Ober- und Untersumme in diesem Fall ein zu grosses Resultat liefert.

Aufgabe 4 Wahrscheinlichkeitsrechnung (1 + 2.5 + 2 + 2 + 1 + 2 + 2.5 = 13 Punkte)

Beim Spielen kann man statt Würfel auch andere Körper verwenden, z. B. Oktaeder (8 Flächen). In dieser Aufgabe werden zwei regelmäßige Oktaeder verwendet, bei denen jede der acht Flächen mit gleicher Wahrscheinlichkeit (W'keit) oben liegt. Während aber bei dem einen die Zahlen 1 bis 8 auf den Flächen stehen, fehlt beim zweiten die 1; dafür kommt die 8 zwei Mal vor. Das erste Oktaeder heißt im Folgenden „korrekt“, das zweite „gefälscht“.

Zuerst benützen wir das zweite, gefälschte Oktaeder.

a) Wie gross ist die W'keit in 3 Würfen mindestens eine 8 zu werfen?

b) Wie oft muss man mindestens werfen, um mit einer Sicherheit von mehr als 99.9% mindestens einmal die Zahl 3 zu erhalten?

c) Wie gross ist die W'keit, bei 3 Würfen eine Augensumme von mindestens 22 zu erhalten?

Beide Oktaeder werden in eine Urne gelegt. Hans zieht (blind) eines der beiden Oktaeder.

d) Er wirft es zweimal. Wie gross ist die W'keit, genau einmal die Zahl 8 zu werfen.

e) Hans wirft das gezogene Oktaeder einmal und zwar die Augenzahl 8. Wie gross ist die W'keit, dass er das korrekte, erste Oktaeder gezogen hat?

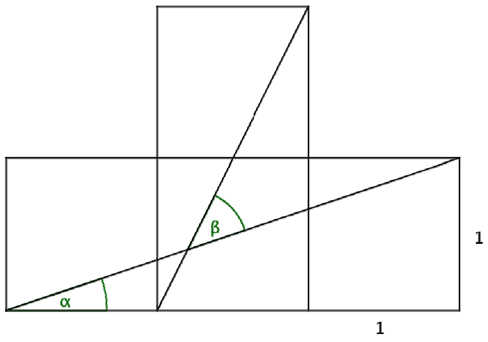
Hans und Fritz spielen. Hans bekommt das korrekte Oktaeder, Fritz das gefälschte. Sie werfen abwechslungsweise. Sieger ist, wer zuerst eine 8 wirft. Hans beginnt.

f) Fritz wettet 2 Fr. auf die Behauptung: "Ich gewinne und zwar spätestens in meinem 3. Wurf."
Mit welcher Wahrscheinlichkeit verliert er diese Wette?

g) Welcher Vorteil wiegt bei diesem Spiel mehr: Entweder "mit dem gefälschten Oktaeder spielen" oder "beginnen zu dürfen"? Begründen Sie Ihre Entscheidung eindeutig durch eine Rechnung.

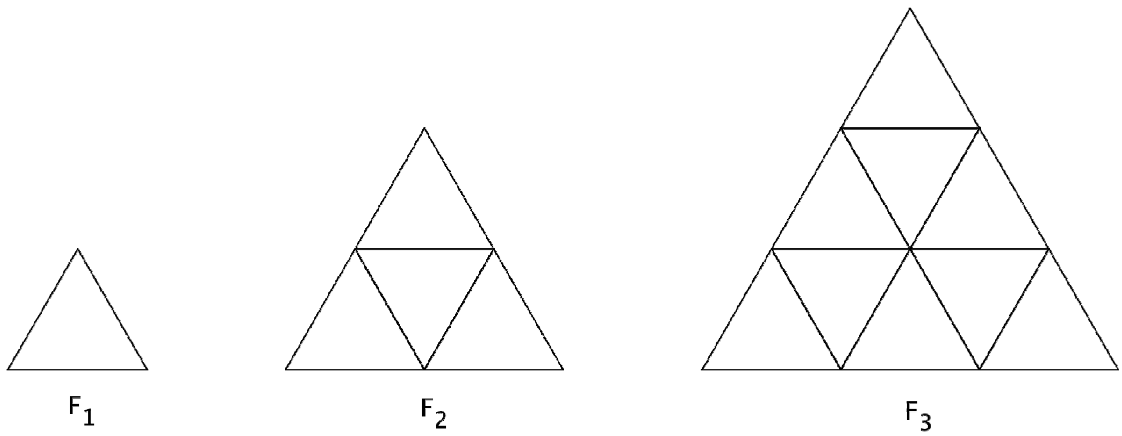
Aufgabe 5 Trigonometrie (3 Punkte)

Gegeben sind 4 Quadrate mit Seitenlänge 1.
Berechnen Sie die Winkel α und β.



Aufgabe 6 Folgen und Reihen (3 + 3 + 2 = 8 Punkte)

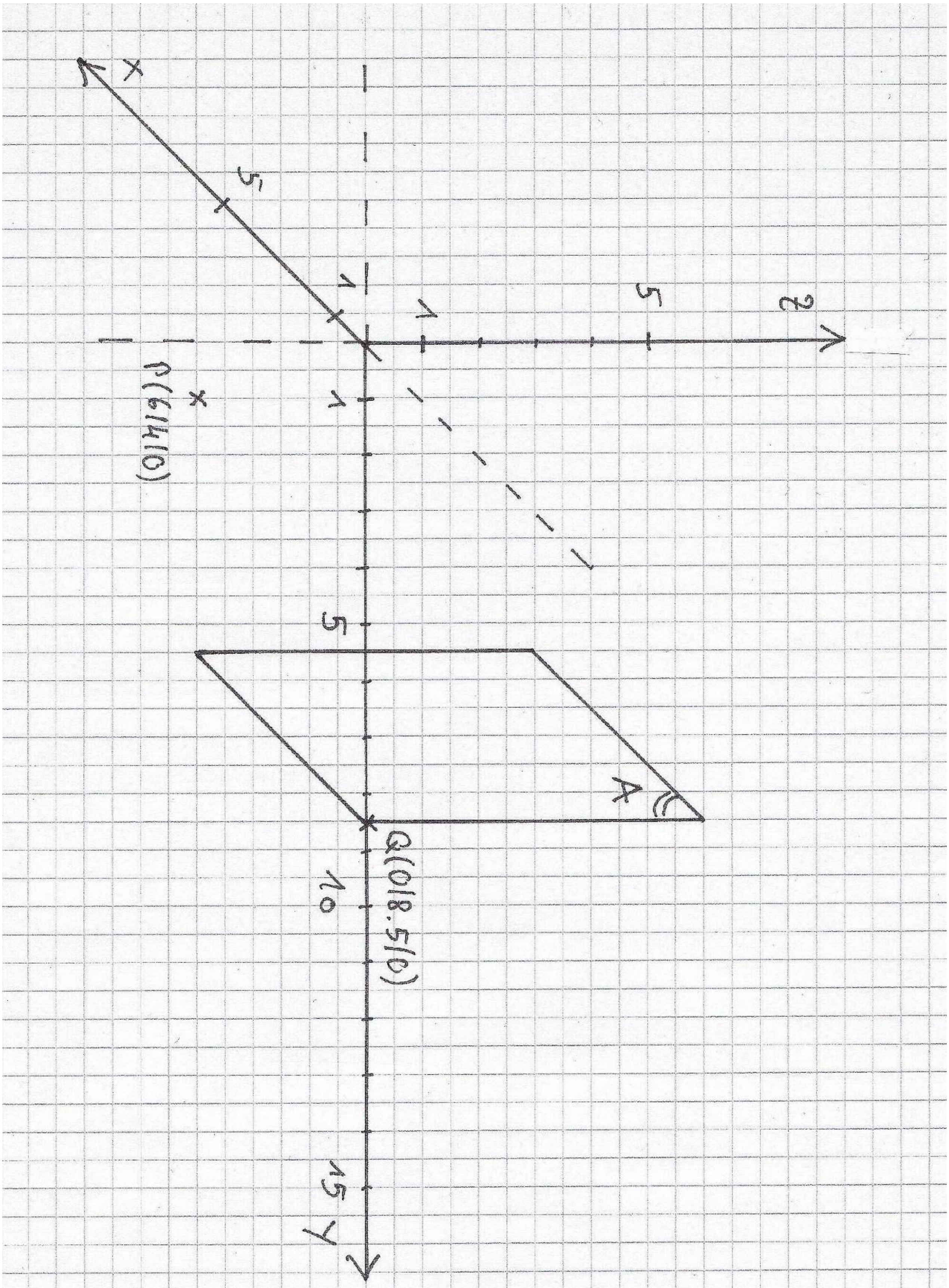
Es wird eine Folge von Figuren F_n aus Streichhölzern gelegt.



Mit d_n bezeichnen wir die Anzahl der kleinen Teildreiecke von F_n, also $d_1 = 1$, $d_2 = 4$, … Mit h_n bezeichnen wir die Anzahl der für F_n benötigten Hölzchen, also $h_1 = 3$, $h_2 = 9$, ...

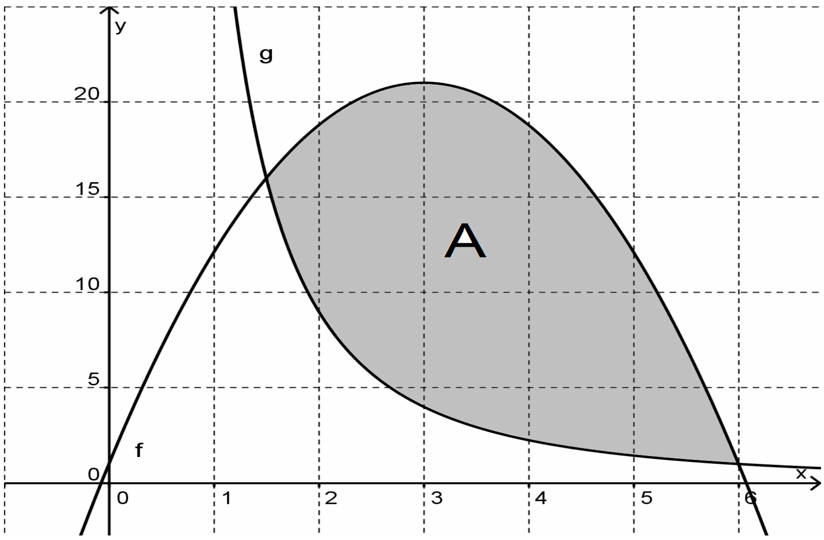
a) Wie lauten d_4 und h_4? Wie gross sind d_{100} und h_{100}?
b) Geben Sie (explizite oder rekursive) Definitionen von d_n und h_n an.
c) In der ersten Figur legt man mit 3 Hölzchen 1 Dreieck. In der zweiten Figur mit 9 Hölzchen 4 kleine Dreiecke, also im Durchschnitt 2.25 Hölzchen pro gelegtes Dreieck. Diese durchschnittliche Zahl der Hölzchen, die pro kleines Dreieck gebraucht werden, nimmt also von Figur zu Figur allmählich ab. Gegen welchen Grenzwert strebt diese Zahl?

Beiblatt zur Aufgabe 1



Beiblatt zur Aufgabe 3

a)



b)