Fach Mathematik
Klasse(n) alle 5. Klassen

Dauer der Prüfung: 4 Std.
Erlaubte Hilfsmittel: Fundamentum Mathematik und Physik
Taschenrechner TI-83 Plus inkl. Applikation CtlgHelp

Vorbemerkungen:

- Die Lösungswege sind nachvollziehbar anzugeben. Ergebnisse ohne Begründung können mit 0 Punkten bewertet werden.
- Lösungen als Dezimalzahlen sind auf 2 Nachkommastellen zu runden.
- Jede Aufgabe muss auf ein separates Blatt gelöst werden. Teilaufgaben sind deutlich zu nummerieren.
- Es können maximal 63 Punkte erreicht werden. Die Note 6 wird für 56 Punkte erteilt.

Viel Erfolg wünschen Christian Boller, Philippe Meili, Halina Michalski, Andreas Stahel und Bruno Zurfluh!

Aufgabe 1 Raumgeometrie (3 + 2 + 3.5 + 3.5 + 1 + 2 = 15 Punkte)

Gegeben ist ein Quader mit den Kantenlängen 12, 13 und 10 im Koordinatensystem (vgl. Beiblatt). Vom Startpunkt S(12/13/0) aus wird ein punktförmiger Ball in der Richtung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6.5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

abgeschossen. Der Ball trifft anschliessend gewisse Seitenflächen des Quaders, an denen er reflektiert wird.

a) Berechnen Sie die Koordinaten des ersten Auftreffpunktes A in der linken Seitenfläche des Quaders. Konstruieren Sie zudem diesen Punkt A auch auf dem Beiblatt.
► *Die Konstruktionslinien müssen deutlich erkennbar sein!*

b) Nach der Reflexion im Punkt A (siehe Teilaufgabe a)) fliegt der Ball weiter und trifft im Punkt $B(2/8.\overline{6}/10)$ auf die Deckfläche des Quaders. Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Punkt R(12/–13/0) auf der Geraden AB liegt.

c) Zeichnen Sie auf dem Beiblatt die Flugbahn des Balles von S über A nach B mit Farbe exakt ein. Berechnen Sie den Winkel α zwischen den Flugbahnen SA und AB.

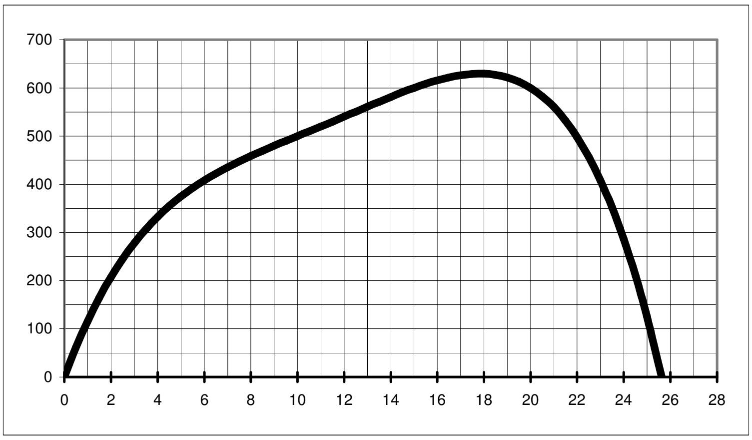
d) Berechnen Sie den kürzesten Abstand d des Startpunktes S von der Flugbahn AB.

e) Ergänzen Sie auf dem Beiblatt die Punkte S, A, B durch einen vierten Punkt C so, dass das Viereck SABC (Reihenfolge der Punkte beachten!) ein Parallelogramm wird. Berechnen Sie die Koordinaten der vierten Ecke C.

f) Heben Sie denjenigen Teil des Parallelogramms SABC (vgl. Teilaufgabe e)), der aus dem Quader herausragt, auf dem Beiblatt farbig hervor.
► *Die Konstruktionslinien müssen deutlich erkennbar sein!*

Aufgabe 2 Funktionen und Differentialrechnung: Eine Bergtour
(1.5 + 1.5 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 3 = 12 Punkte)

Gegeben ist die Funktion $h(x) = -0.02x^4 + 0.9x^3 - 15x^2 + 130x$.



a) Geben Sie die Gleichung dieser Funktion in den Taschenrechner ein und lassen Sie sich die Graphik anzeigen. Wie lauten die Koordinaten des Hochpunktes B und diejenige der positiven Nullstelle?

b) Geben Sie die Gleichungen der 1. und der 2. Ableitung der Funktion h an.

In allen weiteren Teilaufgaben beschreibt die Funktion h näherungsweise das Höhenprofil eines Jura-Wanderweges. Die Wanderung beginnt im Punkt A(0/0) und führt über einen Berggipfel B bis zum Endpunkt C auf der anderen Seite des Berges. (Details zum Endpunkt C folgen in Teilaufgabe g).)

Die x-Koordinate entspricht dem horizontal zurückgelegten Weg (also dem Weg, wie er z.B. auf der Wanderkarte sichtbar ist) gemessen in Kilometern.

Die y-Koordinate gibt die in Metern gemessene Höhendifferenz relativ zum Startpunkt A an. (Der Startpunkt hat deshalb die y-Koordinate 0.)

c) Berechnen Sie die Steigung der Funktion h im Punkt A. Geben Sie zudem an, wie steil der Wanderweg in der Realität ist (im Punkt A) und zwar in % und als Winkel φ zur Horizontalen.

d) An welcher Stelle (x-Wert) zwischen x = 0 und x = 22 befindet sich die steilste Stelle des Wanderwegs (egal ob bergauf oder bergab)?

e) Wenn man den Graphen der Funktion h genau betrachtet, sieht man, dass die Steigung des Weges beim Aufstieg von A nach B nicht immer abnimmt, sondern in einem Abschnitt des Weges wächst. Geben Sie die beiden x-Koordinaten an, zwischen denen die Steigung des Weges zunimmt.

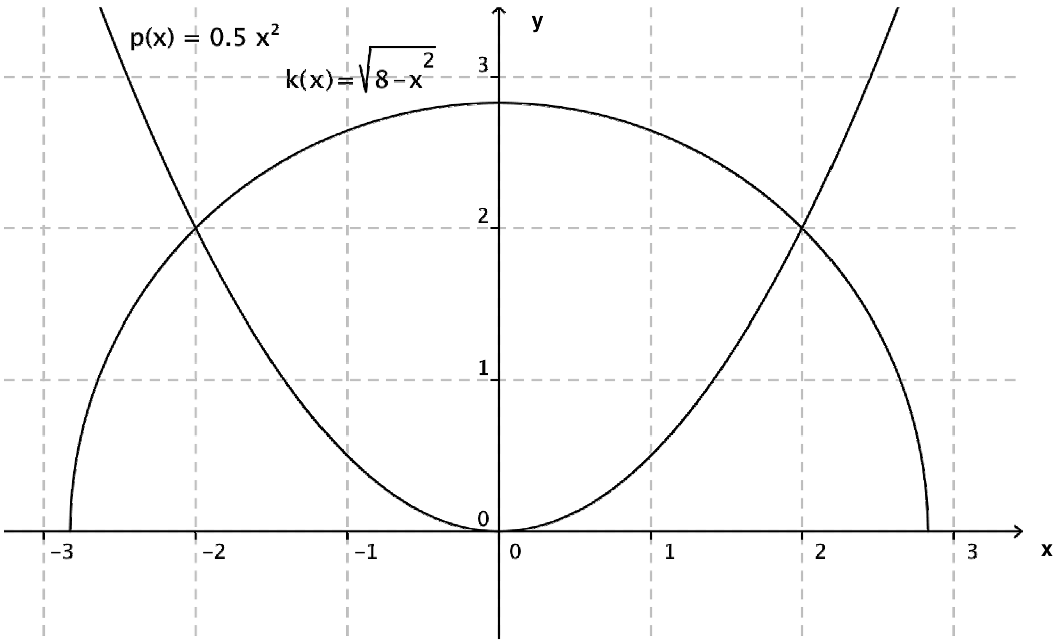
f) In der Realität liegt der Berggipfel B 1126.06 Meter über dem Meeresspiegel. Ändern Sie die Funktionsgleichung von h so, dass die Funktionswerte die Höhe über dem Meeresspiegel angeben, und nennen Sie diese neue Funktion H.

g) Der Endpunkt C der Wanderung liegt 675 Meter über dem Meer. Geben Sie die x-Koordinate von C an.

h) Für die zeitliche Planung der Wanderung wird die folgende „Faustregel" angewendet: Horizontal (d.h. in x-Richtung) werden 5 km pro Stunde zurückgelegt. Bergauf werden zusätzlich zur horizontalen Komponente 15 Minuten pro 100 Höhenmeter gerechnet. Bergab wird nur der horizontale Anteil gezählt. Wie lange dauert die Wanderung (ohne Pause) von A bis C und wo (x-Wert) liegt ihre zeitliche Mitte?

Aufgabe 3 Integralrechnung (1.5 + 1 + 2 + 1.5 + 1.5 + 2 + 2.5 = 12 Punkte)

Gegeben sind der Halbkreis k mit der Gleichung $k(x) = \sqrt{8 - x^2}$ und die Parabel p mit der Gleichung $p(x) = 0.5x^2$.



a) Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunktes H der Funktion k. Berechnen Sie dann den Flächeninhalt F des abgebildeten Halbkreises.

b) Zeichnen Sie die Gerade mit der Gleichung g(x) = x ins obige Koordinatensystem ein. Die Graphen der drei Funktionen haben einen gemeinsamen Schnittpunkt S. Geben Sie seine Koordinaten an.

c) Im 1. Quadranten wird von der Geraden g (vgl. Teilaufgabe b)) und der Parabel p eine Fläche A eingeschlossen. Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A mit Hilfe der Stammfunktion(en).
► *Die TR-Befehle „fnInt(“ und „Calculate ∫f(x)dx“ dürfen in dieser Teilaufgabe nicht verwendet werden!*

d) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes B, das vom Halbkreis k und von der Parabel p eingeschlossen wird.

e) Wie Teilaufgabe d), aber ohne dass Sie die TI-83-Befehle „fnInt(“ und „Calculate ∫f(x)dx“ verwenden.
► *Tipp: Zerlegen Sie das Flächenstück B geeignet.*
► *Falls die Teilaufgabe d) bereits so gelöst wurde: Zeigen Sie, wie der Inhalt des Flächenstückes B mit Hilfe der genannten TI-83-Befehle berechnet werden kann.*

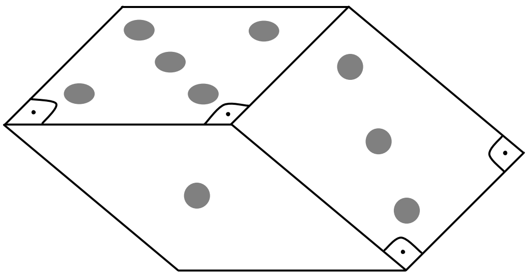
f) Wie hoch liegt die Parabel p im Intervall [–2;2] durchschnittlich über der x-Achse? (Das heisst, berechnen Sie den Mittelwert $\overline{m}$ der Funktionswerte von p zwischen x = –2 und x = 2.) Zeichnen Sie die Gerade mit der Gleichung y = $\overline{m}$ ins obige Koordinatensystem ein.

g) Das Flächenstück, das im 1. Quadranten von der x-Achse, der Parabel p und dem Halbkreis k eingeschlossen wird, rotiert um die x-Achse. Dabei entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie sein Volumen V.

Aufgabe 4 Wahrscheinlichkeitsrechnung

(1 + 1.5 + 1.5 + 1 + 1 + 2 + 2 + 5 = 15 Punkte)

Es soll mit einem Spat (vgl. Figur) „gewürfelt“ werden. Dieser Spat besteht aus vier kongruenten Quadraten und zwei kongruenten Rhomben. Für die sechs Seitenflächen bzw. die Augenzahlen gilt folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:



Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	0.16	0.17	0.17	0.17	0.17	0.16

Der Spat wird jeweils viermal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass …

a) … in jedem Wurf die Augenzahl 5 geworfen wird,

b) … genau einmal die „5“ resultiert,

c) … mindestens einmal die Augenzahl 5 heraus kommt,

d) … genau im 1. und im 3. Wurf „5“ erhalten wird,

e) … genau zweimal die Augenzahl 5 „gewürfelt“ wird,

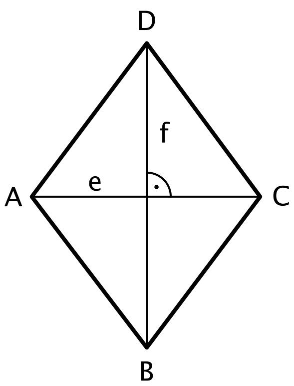
f) … die Summe der gewürfelten Augenzahlen höchstens 5 beträgt.

g) Wie oft muss man diesen Spat mindestens werfen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal die Augenzahl 5 zu erhalten, grösser als 99 % wird?

Geometrische Wahrscheinlichkeit:

h) Für diesen Aufgabenteil wird nur eine rhombenförmige Seitenfläche des ganzen Spates betrachtet, also ein einzelner Rhombus. Für die Diagonalen dieses Rhombus gilt: $e = \overline{AC} = 3$ cm, $f = \overline{BD} = 4$ cm (vgl. Figur).

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zufallspunkt im Innern des Rhombus näher bei der Ecke A als bei der Ecke D liegt.



Aufgabe 5 Folgen und Reihen (1.5 + 0.5 + 2 + 1.5 + 1 + 2.5 = 9 Punkte)

Im Punkt P(2/1) beginnt eine Dreieckspirale. Sie setzt sich aus unendlich vielen Teilstrecken zusammen und strebt gegen das Spiralzentrum Z. Die erste Teilstrecke a_1 besitzt die Länge 6 und ist parallel zur x-Achse. Jede weitere Teilstrecke ist 10 % kürzer als die vorangehende. Die Innenwinkel der Dreieckspirale betragen immer 60°.

a) Berechnen Sie die Längen der Teilstrecken a_2, a_3 und a_4.

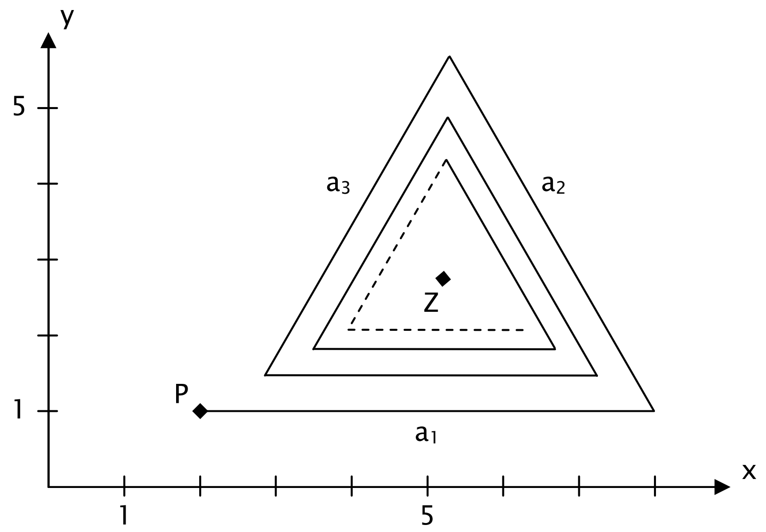
b) Wie lang ist die Teilstrecke a_{15}?

c) Welche Teilstrecke ist als erste kürzer als 10^{-6}?

d) Berechnen Sie die Länge des Streckenzugs $s = a_4 + a_5 + \ldots + a_{15}$.

e) Welche Länge ℓ besitzt die gesamte Spirale?

f) Berechnen Sie die x-Koordinate des Spiralzentrums Z.



Beiblatt zur Aufgabe 1