Fach Mathematik
Klasse(n) alle 5. Klassen

Dauer der Prüfung:	4 Std.
Erlaubte Hilfsmittel:	Fundamentum Mathematik und Physik Taschenrechner TI-83 Plus inkl. Applikation CtlgHelp

Vorbemerkungen:

- Die Lösungswege sind nachvollziehbar anzugeben. Ergebnisse ohne Begründung können mit 0 Punkten bewertet werden.
- Lösungen als Dezimalzahlen sind auf 2 Nachkommastellen zu runden.
- Jede Aufgabe muss auf ein separates Blatt gelöst werden. Teilaufgaben sind deutlich zu nummerieren.
- Es können maximal 58 Punkte erreicht werden. Die Note 6 wird für 52 Punkte erteilt.

Viel Erfolg wünschen Simone Jordan, Helmut Locher,
Markus Maurer, Philippe Meili und Bruno Zurfluh!

Aufgabe 1 Raumgeometrie (2.5 + 2 + 2.5 + 2.5 + 2.5 = 12 Punkte)

Die Gerade g geht durch die Punkte A(5/7/2) und B(1/0/5).

a) Zeichnen Sie auf dem Beiblatt (Seite 6) die Gerade g ins vorgegebene Koordinatensystem ein. Konstruieren und beschriften Sie die Spurpunkte S_1, S_2 und S_3 der Geraden g. Heben Sie schliesslich den sichtbaren Teil der Geraden g farbig hervor.

► *Die Konstruktionslinien müssen deutlich erkennbar sein!*

► *Hinweis: Ein Punkt heisst sichtbar, wenn er im I. Oktanden liegt, d.h. seine drei Koordinaten alle grösser oder gleich Null sind.*

b) Berechnen Sie die exakten Koordinaten des Spurpunktes S_1.

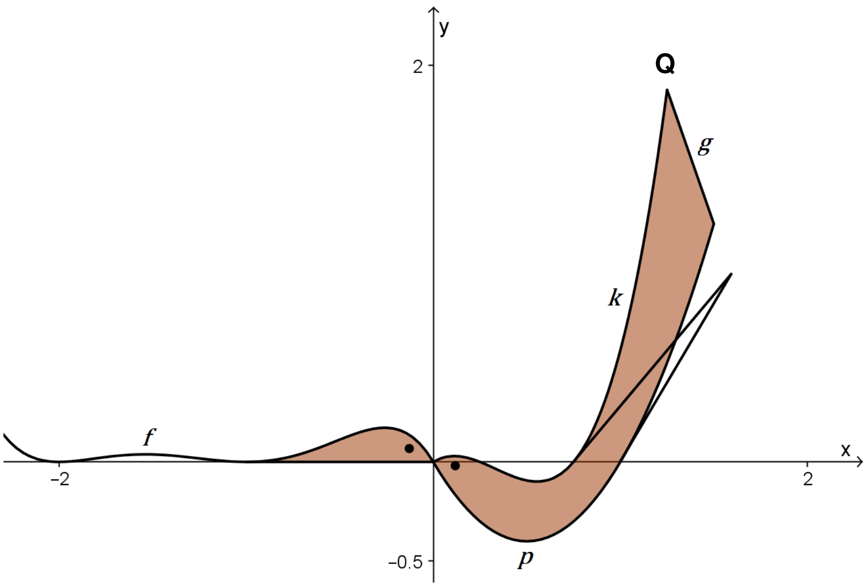
c) Die Gerade h geht durch die Punkte B und C(–1/4/3). Unter welchem Winkel α schneiden sich die beiden Geraden g und h im Punkt B?

d) Die Gerade k geht durch den Punkt D(7/y/5) und schneidet die Gerade g im Punkt A rechtwinklig. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden k.

e) Ein Punkt P, der auf der z-Achse liegt, bildet mit den Punkten A und B ein gleichschenkliges Dreieck ABP mit der Basis $\overline{AB}$. Bestimmen Sie die Koordinaten von P.

Aufgabe 2 Differential- und Integralrechnung (1.5 + 1.5 + 3 + 3 + 1 = 10 Punkte)

Eine Polynommaus und ein Polynomvogel küssen sich im Ursprung O(0/0) eines Koordinatensystems. Die eingefärbten Flächen beschreiben den Querschnitt der beiden Tiere. Sie werden durch Graphen ganzrationaler Funktionen verschiedenen Grades begrenzt.



I. Mausaufgaben

Die Maus wird durch die x-Achse und durch den Graphen der ganzrationalen Funktion fünften Grades f begrenzt:

$$f: \quad y = -0.4x^5 - 2.4x^4 - 5.2x^3 - 4.8x^2 - 1.6x\,.$$

Der Körper der Maus (ohne Schwanz) reicht vom Ursprung O bis zur ersten Nullstelle von f links des Ursprungs. Links dieser Nullstelle stellt der Graph von f den Schwanz der Maus dar.

a) Bestimmen Sie den Inhalt der eingefärbten Querschnittfläche der Maus.

b) Offenbar handelt es sich sogar um eine Polynomspitzmaus. Wie spitz ist diese Maus? Berechnen Sie dazu den Winkel μ des Mausnasenspitzes.

II. Vogelaufgaben

Der Querschnitt des Vogelkörpers wird durch die Gerade g, die quadratische Parabel p und die kubische Parabel k begrenzt:

$$g: \quad y = -2.7x + 5.25\,,$$
$$p: \quad y = 1.6x^2 - 1.6x\,,$$
$$k: \quad y = 3x^3 - 3x^2 + \tfrac{9}{16}x\,.$$

c) Der Vogel hat nicht nur einen spitzen Schnabel, seine Querschnittfläche weist auch im Punkt Q einen spitzen Winkel φ auf. Berechnen Sie die Koordinaten von Q sowie den Winkel φ.

d) Bestimmen Sie den Inhalt der eingefärbten Querschnittfläche des Vogels.

e) Glatt geküsst: Zeigen Sie, dass bei diesem Kuss der Verlauf der Oberlippe der Maus ohne Knick in den Verlauf des „Unterschnabels“ des Vogels übergeht.

Aufgabe 3 Differentialrechnung (1 + 1 + 1.5 + 1.5 + 3 = 8 Punkte)

Ein Modelleisenbahnbauer möchte für seine Züge einen Tunnel durch einen Pappmaché-Berg fräsen. Der Querschnitt des Tunnels ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion

$$f(x) = 6 - \frac{100}{(x^2 - 16)^2}$$

und der x-Achse eingeschlossen wird. Eine Längeneinheit ist auf beiden Achsen ein Zentimeter.

a) Wie breit ist der Tunnel an seiner Sohle?

b) Die Tunnelhöhe beträgt ein Drittel der Berghöhe. Wie hoch ist der Berg?

c) In welchem Punkt P weist der Tunnelbogen die Steigung –1 auf?

d) Zeichnen Sie den Tunnelbogen im Massstab 1:1 in ein Koordinatensystem.

e) Ein Modellzug mit rechteckigem Querschnitt (3 cm breit, 4 cm hoch, Räder und Schienen werden zur Vereinfachung vernachlässigt) fährt mittig durch den Tunnel. Zeichnen Sie den Querschnitt des Zuges mit Farbe in Ihre Zeichnung von Teilaufgabe d) ein und berechnen Sie den kleinsten Abstand zwischen der rechten oberen Ecke des Zuges und dem Tunnelbogen.

Aufgabe 4 Folgen und Reihen (2 + 1 + 2 + 3 + 2 = 10 Punkte)

Eine Perlenkette ist symmetrisch aufgebaut: In der Mitte ist die grösste Perle mit einem Durchmesser von 2.4 cm. Links und rechts folgen immer kleinere Perlen, wobei zwei Perlen links und rechts, die von der mittleren Perle gleich weit entfernt sind, immer gleich gross sind.

Die Länge einer Perlenkette wird folgendermassen bestimmt: Die Perlen werden entlang ihres Kugeldurchmessers durchbohrt und so auf einen Faden aufgezogen, dass sich zwei benachbarte Perlen berühren. Danach wird die Kette gerade hingelegt und die Länge der Perlenstrecke gemessen.

a) Bei der ersten Perlenkette ist der Durchmesser jeder Perle immer 0.2 cm kleiner als derjenige der vorangehenden Perle. Wie viele Perlen besitzt diese Kette höchstens und wie lang ist sie dann?

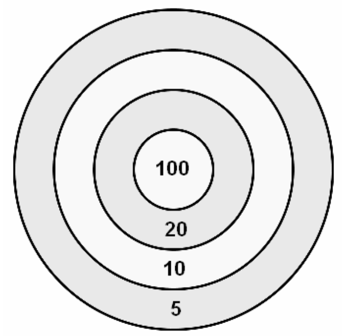
b) Bei einer zweiten Perlenkette ist der Durchmesser jeder Perle 10 % kleiner als derjenige der vorangehenden Perle. Wie lang könnte eine solche Kette höchstens werden?

c) In der Realität enthält die zweite Perlenkette nur Perlen, die einen Durchmesser von mehr als 0.5 cm aufweisen. Wie viele Perlen besitzt somit die ganze Kette?

d) Berechnen Sie das Gesamtvolumen aller Perlen der Kette von Teilaufgabe c). Welche Masse besitzt diese Perlenkette, wenn die Dichte der Perlen 2.7 g/cm^3 beträgt? (Löcher und Faden dürfen hier vernachlässigt werden.)

e) Eine dritte Perlenkette ist ebenfalls symmetrisch aufgebaut mit der grössten Perle in der Mitte. Auch bei ihr ist der Durchmesser jeder Perle 10 % kleiner als derjenige der vorangehenden Perle. Die Länge dieser Kette beträgt 31 cm bei genau 19 Perlen. Welchen Durchmesser besitzt die grösste Perle?

Aufgabe 5 Wahrscheinlichkeitsrechnung (1 + 2 + 1.5 + 2 + 3.5 + 1.5 + 1.5 = 13 Punkte)



In seiner Maturarbeit baut Carlo ein mittelalterliches Katapult im Massstab 1:10 nach. Damit will er die Treffsicherheit dieser Geräte testen. Er verwendet dazu Stahlkugeln, die er auf eine Zielscheibe mit vier konzentrischen Feldern schiesst. Die Felder bewertet er von innen nach aussen mit 100, 20, 10 und 5 Punkten (vgl. Bild links).

Carlo baut sich zudem eine Spann- und Lade-Automatik für sein Katapult, so dass er in relativ kurzer Zeit eine grosse Anzahl von Versuchen durchführen kann.

a) Im Verlaufe seiner Arbeit wurden 4200 Kugeln abgeschossen. Dabei zeigte sich, dass die Zielscheibe insgesamt in 98 % aller Fälle getroffen wird. Wie viele Kugeln verfehlten die Scheibe?

b) Nur 79 aller 4200 abgeschossenen Kugeln trafen das 100er-Feld. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 abgeschossenen Kugeln genau eine im 100er-Feld landet?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mit 5 Schüssen mindestens einmal ein „100er“ geschossen wird?

d) Wie viele Kugeln müssen abgeschossen werden, um mit einer Sicherheit von 99 % mindestens einen 100er zu landen?

e) Die Treffer-Wahrscheinlichkeit des 20er-Feldes beträgt 8.36 %, jene des 10er-Feldes 30.69 % und das Feld für 5 Punkte wurde mit einer Wahrscheinlichkeit von 57.07 % getroffen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mit 5 Kugeln genau 230 Punkte erreicht werden.

Carlo hatte die Zielscheibe auf eine Betonwand im Keller aufgemalt. Beim Aufprall auf die Mauer waren 13 % aller Kugeln zerbrochen. Die Kugeln stammten jedoch von zwei verschiedenen Lieferanten. $^2/_5$ aller abgeschossenen Kugeln lieferte die Firma A. Von dieser Lieferung hat Carlo noch eine grössere Menge an Kugeln übrig. Er führt deshalb nochmals eine Testserie durch, für die er nur Kugeln der Firma A verwendet. Dabei stellt er fest, dass dieser Kugeltyp in 5 % der Würfe zerbricht.

f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel des Lieferanten B zerbricht?

g) Carlo findet eine zerbrochene Kugel aus der ersten Testserie. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich dabei um eine Kugel der Firma A?

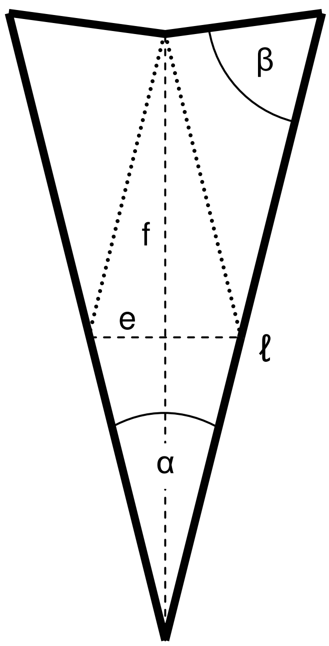
Aufgabe 6 Trigonometrie (2 + 3 = 5 Punkte)

In einem Lift zeigt dieser Pfeil die Fahrtrichtung an. Der Pfeil ist aus einem Rhombus und zwei kongruenten, nicht-rechtwinkligen Dreiecken aufgebaut. Weiter ist eine Dreiecksseite die geradlinige Verlängerung der Rhombusseite. Die Strecken e und f sind die Diagonalen des Rhombus.

Die Ausmessung des Pfeils ergibt folgende Streckenlängen:
$e = 1.0$ cm, $f = 4.0$ cm, $\ell = 4.3$ cm.

a) Berechnen Sie den Winkel α.

b) Berechnen Sie den Winkel β.



Beiblatt zur Aufgabe 1