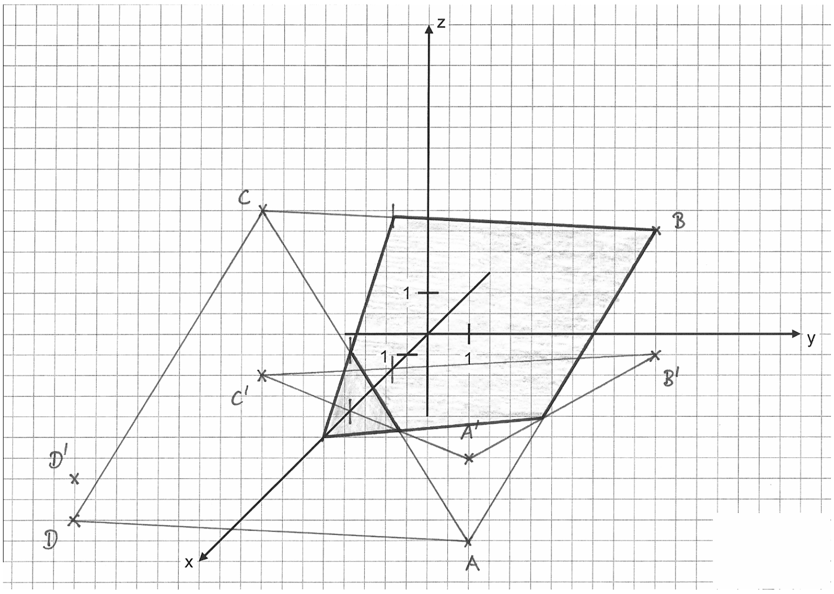
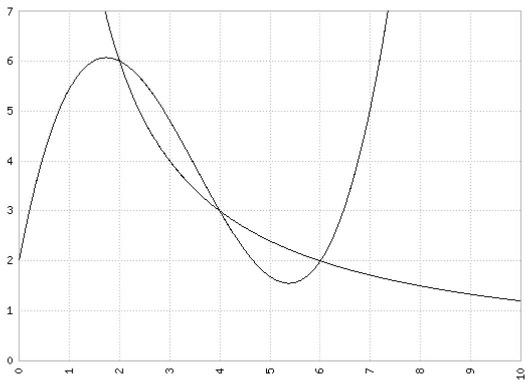
Aufgabe 1 Raumgeometrie		15 P.
a)	 ΔABC *(0.5 P.)* ; Sichtbarkeit der Ecke A *(0.5 P.)* ; Sichtbarkeit der Ecke C *(0.5 P.)* ; Färbung *(0.5 P.)*	2 P.
b)	$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -3-6 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(0.5 P.)* $\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{D(7/-5/-1)}}$ *(0.5 P.)* Punkt D auf Beiblatt einzeichnen *(0.5 P.)* zusätzlich sichtbare Fläche einfärben *(0.5 P.)*	2 P.
c)	$\overline{BC} = \sqrt{1^2 + (-9)^2 + 1^2} = \sqrt{83} \approx 9.11$ *(0.5 P.)* $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 6-4 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{54} \approx 7.35$ *(1 P.)* $\overline{AB} \neq \overline{BC} \Rightarrow$ kein Rhombus *(0.5 P.)*	2 P.
d)	$(BC): \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(0.5 P.)* S: $y = 0 \Rightarrow 0 = 6 - 9s$ *(0.5 P.)*	2 P.

	$\Rightarrow \quad s = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow \quad x = 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3}$ $z = 3 + \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{11}{3}$ $\Rightarrow \quad \underline{\underline{S\left(\frac{5}{3}/0/\frac{11}{3}\right)}}$ *(0.5 P.)*	
e)	$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \left(= -\overrightarrow{AB}\right)$ $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 1 \cdot 5 + (-9)(-2) + 1 \cdot (-5) = 5 + 18 - 5 = 18$ *(0.5 P.)* $\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{\lvert\overrightarrow{BC}\rvert \cdot \lvert\overrightarrow{BA}\rvert} = \frac{18}{\sqrt{83} \cdot \sqrt{54}} = 0.268866\ldots$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow \quad \beta = 74.403176\ldots° \approx \underline{\underline{74.40°}}$ *(0.5 P.)*	1.5 P.
f)	$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \overline{BA} \cdot \overline{BC} \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{83} \cdot \sqrt{54} \cdot \sin\beta = 32.241277\ldots \approx \underline{\underline{32.24}}$	1 P.
g)	$Q(0/y/0) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{BQ} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ y-6 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ y-6 \\ -3 \end{pmatrix}$ *(0.5 P.)* Kriterium: $\overrightarrow{BQ} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ *(0.5 P.)* $\begin{pmatrix} -1 \\ y-6 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = -5 - 2(y-6) + 15 = -5 - 2y + 12 + 15 = -2y + 22 = 0$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow \quad y = 11$ $\Rightarrow \quad \underline{\underline{Q(0/11/0)}}$ *(0.5 P.)* Variante: Satz von Pythagoras als Kriterium verwenden: $\overline{BQ}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AQ}^2$	2 P.
h)	$R \in (BC) \quad \Rightarrow \quad R(1+s/6-9s/3+s)$ *(0.5 P.)* Kriterium: $\overline{AR} = \overline{AB} = \sqrt{54}$ *(0.5 P.)* $\overrightarrow{AR} = \begin{pmatrix} 1+s-6 \\ 6-9s-4 \\ 3+s+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+s \\ 2-9s \\ 5+s \end{pmatrix}$ *(0.5 P.)* $\overline{AR} = \sqrt{(-5+s)^2 + (2-9s)^2 + (5+s)^2} = \sqrt{54}$ mit *intersect* oder von Hand mit Lösungsformel: $s = 0.433734\ldots$ *(0.5 P.)* $\Rightarrow \quad R(1.433734\ldots/2.096385\ldots/3.433734\ldots) \approx \underline{\underline{R(1.43/2.10/3.43)}}$ *(0.5 P.)*	2.5 P.

Aufgabe 2 Integralrechnung		10 P.
a)	 mit *table*: (0/2) ; (1/5.4375) ; (2/6) ; (3/4.8125) ; (4/3) ; (5/1.6875) ; (6/2) ; (7/5.0625) einzeichnen *(1.5 P.)* zu Kurve verbinden. *(0.5 P.)*	2 P.
b)	Schnittpunkte (2/6), (4/3) und (6/2), resp. Integrationsgrenzen 2, 4 und 6 bestimmen (mit *table* oder *intersect*) *(0.5 P.)* $A_{\text{links}} = \int_2^4 \big(f(x) - g(x)\big)dx \approx 1.10$ (mit *fnInt* oder ∫*f(x)dx*) *(1 P.)* $A_{\text{rechts}} = \int_4^6 \big(g(x) - f(x)\big)dx \approx 0.95$ *(1 P.)* $\Rightarrow$ $\underline{\underline{A_{\text{links}} > A_{\text{rechts}}}}$. *(0.5 P.)*	3 P.
c)	$V = \pi \cdot \int_2^8 g(x)^2 dx = 169.646003\ldots \approx \underline{\underline{169.65}}$ (mit *fnInt*)	1 P.
d)	$V = \pi \cdot \int_2^b \left(\frac{12}{x}\right)^2 dx = \pi \cdot \int_2^b 144x^{-2} dx = 144\pi \cdot (-x^{-1})\Big\|_2^b = -\frac{144\pi}{x}\Big\|_2^b = \underline{\underline{-\frac{144\pi}{b} + 72\pi}}$ *(0.5 P.)* *(0.5 P.)* *(0.5 P.)* *(0.5 P.)* Für $b \to \infty$ ist $\frac{1}{b} \to 0$ und damit $\underline{\underline{V \to 72\pi}} \approx 226.19$. *(0.5 P.)*	2.5 P.
e)	Seitenlänge eines Quadrates ist 2 · g(x). $\Rightarrow$ Flächeninhalt eines Quadrates ist $(2 \cdot g(x))^2 = 4 \cdot g(x)^2$. *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ $V = \int_2^8 4 \cdot g(x)^2 dx = \underline{\underline{216}}$ (mit *fnInt*) *(1 P.)*	1.5 P.

Aufgabe 3 Wahrscheinlichkeitsrechnung — 15 P.

a) (1 P.)

Rot: $P(6) = \frac{1}{2}$ *(0.5 P.)*

Blau: $P(1) = \frac{1}{3}$, $P(3) = \frac{1}{6}$, $P(5) = \frac{1}{3}$, $P(6) = \frac{1}{6}$ *(0.5 P.)*

b) (1 P.)

$P(\text{Pasch}) = P(1{+}1) + P(6{+}6) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} = \underline{\underline{25\ \%}}$

<u>Variante:</u> mit Laplace.

R/B	1	1	3	5	5	6
1	2	2	4	6	6	7
1	2	2	4	6	6	7
1	2	2	4	6	6	7
6	7	7	9	11	11	12
6	7	7	9	11	11	12
6	7	7	9	11	11	12

$\Rightarrow P(\text{Pasch}) = \frac{9}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$

c) (1.5 P.)

$P(\text{erst 5. Wurf Pasch}) = P(XXXX\surd)$ *(0.5 P.)*
$= 0.75^4 \cdot 0.25$ *(0.5 P.)*
$= 0.079101\ldots \approx \underline{\underline{7.91\ \%}}$ *(0.5 P.)*

d) (1.5 P.)

$P(\text{mind. 1 Pasch}) = 1 - P(\text{nie Pasch})$ *(0.5 P.)*
$= 1 - 0.75^{10}$ *(0.5 P.)*
$= 0.943686\ldots \approx \underline{\underline{94.37\ \%}}$ *(0.5 P.)*

e) (3 P.)

Summe 8 $= 6+2 = 5+3 = 4+4 = 3+5 = 2+6$ *(0.5 P.)*

Weiss-Blau: $0 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{9}}}$ *(1 P.)*

Weiss-Rot: $0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{12}}}$ *(1 P.)*

Blau-Rot: $0 + 0 + 0 + 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$ *(0.5 P.)*

<u>Hinweis:</u> $\frac{1}{9} = 11.\bar{1}\ \%$, $\frac{1}{12} = 8.\bar{3}\ \%$.

<u>Variante:</u> mit Laplace.

W/B	1	1	3	5	5	6
1	2	2	4	6	6	7
2	3	3	5	7	7	8
3	4	4	6	8	8	9
4	5	5	7	9	9	10
5	6	6	8	10	10	11
6	7	7	9	11	11	12

W/R	1	1	1	6	6	6
1	2	2	2	7	7	7
2	3	3	3	8	8	8
3	4	4	4	9	9	9
4	5	5	5	10	10	10
5	6	6	6	11	11	11
6	7	7	7	12	12	12

$\Rightarrow P(\text{8 mit W/B}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; $P(\text{8 mit W/R}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$;
$P(\text{8 mit R/B}) = \frac{0}{36} = 0$ (Aufstellung siehe Teilaufgabe b).

f)	Augensumme mind. 10 $= 6+6 = 6+5 = 5+6 = 6+4 = 4+6 = 5+5$ W-B: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3} = \frac{7}{36}$ *(1 P.)* W-R: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{4}$ *(1 P.)* B-R: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{4}$ *(1 P.)* Weil $\frac{7}{36} = 19.\overline{4}\ \% < 25\ \% = \frac{1}{4}$ ist, folgt: Die beiden Würfelkombinationen Weiss-Rot und Blau-Rot sind beide am günstigsten. *(0.5 P.)* <u>Variante:</u> mit Laplace (Aufstellungen siehe oben). $\Rightarrow$ P(mind. 10 mit W/B) = $\frac{7}{36}$; P(mind. 10 mit W/R) = $\frac{9}{36}$; P(mind. 10 mit R/B) = $\frac{9}{36}$.	3.5 P.
g)	P(6+6) = P(W-B 6+6) + P(W-R 6+6) + P(B-R 6+6) $= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{108} \approx 6.48\ \%$ *(1 P.)* $\mu = n \cdot P(6+6) = 200 \cdot \frac{7}{108} = 12.\overline{962} \approx$ <u>in 13 Würfen.</u> *(0.5 P.)* <u>Variante:</u> P(6+6) mit Laplace: Über alle drei Aufstellungen gesehen ist $g = 3 + 1 + 3 = 7$ und $m = 36 + 36 + 36 = 108$.	1.5 P.
h)	P(3 x 1+1) = P(W-B 3 x 1+1) + P(W-R 3 x 1+1) + P(B-R 3 x 1+1) $= \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^3$ *(1 P.)* $= 0.005379\ldots$ P(B-R wenn 3 x 1+1) = $\frac{\left(\frac{1}{6}\right)^3}{\left(\frac{1}{18}\right)^3+\left(\frac{1}{12}\right)^3+\left(\frac{1}{6}\right)^3} = \frac{216}{251} = \underline{\underline{86.06\ \%}}$ *(1 P.)* <u>Hinweis:</u> Der Faktor $\frac{1}{3}$ für die zufällige Auswahl einer Würfelkombination kann, muss aber nicht aufgeführt werden, weil er sich sowieso wegkürzt. <u>Variante:</u> Baumdiagramm verwenden. <u>Variante:</u> mit Laplace: $g = 6^3 = 216$ und $m = 6^3 + 2^3 + 3^3 = 251$.	2 P.

Aufgabe 4 Folgen und Reihen		10 P.
a)	a_n und b_n mit Einsetzen, *Listen*, *table* oder *trace*: $a_1 = 5000$ Fr. $b_1 = 5000$ Fr. $c_1 = 5045$ Fr. $a_2 = 5500$ Fr. $b_2 = 5400$ Fr. $c_2 = 5045 + 90 \cdot 1 + 45 = 5180$ Fr. $a_3 = 6000$ Fr. $b_3 = 5832$ Fr. $c_3 = 5180 + 90 \cdot 2 + 45 = 5405$ Fr. *(1 P.)* *(1 P.)* *(1 P.)*	3 P.
b)	mit *Listen*, *table*, *trace, intersect*, von Hand mit Logarithmen oder Einsetzen: $b_{12} = 11'658$ Fr., $b_{13} = 12'591$ Fr. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{n = 13}}$ (exakt: n = 12.38)	1 P.
c)	mit *Listen*, *table*, *trace*, *intersect* oder Einsetzen: $a_7 = 8000$ Fr. $b_7 = 7934$ Fr. $a_8 = 8500$ Fr. $b_8 = 8569$ Fr. $\Rightarrow$ $\underline{\underline{n = 8}}$ (graphisch: n = 7.53)	1 P.
d)	$a_{10} = 9500$ Fr. $\Rightarrow$ $s_{10} = \frac{10}{2} \cdot (5000 + 9500) = 72'500$ *(1 P.)* Jahreslohn = 12 Monatslöhne $\Rightarrow$ $12 \cdot 72'500 = \underline{\underline{870'000 \text{ Fr.}}}$ *(0.5 P.)* Variante für Summenformel: $s_{10} = 5000 \cdot 10 + \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 500$	1.5 P.
e)	$(5000 \cdot n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 500) \cdot 12 = 1'500'000$ *(0.5 P.)* mit *intersect*: n = 14.80 Jahre = 14 Jahre 10 Monate *(0.5 P.)* (Umrechnung: 0.80 Jahre = 0.80 · 12 Monate = 9.54 Monate) *(0.5 P.)* Variante: Mit gezieltem Ausprobieren: 14 Jahre $\Rightarrow$ 1'386'000 Fr.; $a_{15} = 12'000$ Fr.; 14 Jahre 9 Monate $\Rightarrow$ 1'494'000 Fr.; 14 Jahre 10 Monate $\Rightarrow$ 1'506'000 Fr.	1.5 P.
f)	mit Einsetzen, *Listen*, *table* oder *trace*: $d_1 = 5000$ Fr., $d_2 = 7273$ Fr., $d_3 = 9167$ Fr. *(1 P.)* $d_n = \frac{60'000 + \frac{40'000}{n}}{2 + \frac{18}{n}} \xrightarrow{n \to \infty} \frac{60'000 + 0}{2 + 0} = \underline{\underline{30'000 \text{ Fr.}}}$ *(0.5 P.)* Interpretation: Der Monatslohn wird 30'000 Fr. nie übersteigen. *(0.5 P.)*	2 P.

Aufgabe 5 Extremwertaufgabe		13 P.
a)	$d = 5$ m, $H = 12$ m $\Rightarrow$ $r = 2.5$ m, $h = H - r = 9.5$ m $V = \pi r^2 h + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 = 186.53 + 32.72 = 219.256987\ldots \approx \underline{\underline{219.26\ m^3}}$ *(0.5 P.)* *(0.5 P.)* *(0.5 P.)*	1.5 P.
b)	$\rho = \frac{m}{V}$ $\Rightarrow$ $V = \frac{m}{\rho} = \frac{110'000}{700} = 157.14\ m^3 < V_a$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Ja.}}}$ *(0.5 P.)* *(0.5 P.)* *(0.5 P.)* <u>Variante:</u> $\Rightarrow$ $m = \rho \cdot V = 700 \cdot 219.26 = 153'479.89$ kg > 110 t $\Rightarrow$ Ja.	1.5 P.
c)	$V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$ *(0.5 P.)* $S = 2\pi rh + \pi r^2 + \frac{1}{2}\cdot 4\pi r^2 = 2\pi rh + 3\pi r^2$ *(1 P.)*	1.5 P.
d)	$V = 175\ m^3$ $\Rightarrow$ $h = \frac{175 - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2}$ *(1 P.)* h in S einsetzen *(1 P.)* $\Rightarrow$ zeichnen $\Rightarrow$ mit minimum: $x = r = 3.2211\ldots = \underline{\underline{3.22\ m}}$ *(1 P.)* r in h einsetzen $\Rightarrow$ $h = 3.22$ m ($= r$) *(0.5 P.)* $\Rightarrow$ $H = h + r = \underline{\underline{6.44\ m}}$ *(0.5 P.)* <u>Hinweis:</u> z.B. h(r) auf Y1 speichern, S(h,r) auf Y2. <u>Varianten:</u> Mehr Rechnen von Hand (vgl. auch Teilaufgabe f).	4 P.
e)	aus Minimum von d): $y = S = 168.9844463\ m^2$ $S \cdot 341 = \underline{\underline{55'577.70\ \text{Fr.}}}$	1 P.
f)	$V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3$ $\Rightarrow$ $h = \frac{V - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2}$ *(0.5 P.)* h in S einsetzen: $S = 2\pi r \cdot \frac{V - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2} + 3\pi r^2 = \frac{2V}{r} - \frac{4}{3}\pi r^2 + 3\pi r^2 = 2Vr^{-1} + \frac{5}{3}\pi r^2$ *(0.5 P.)* S(r) nach r ableiten: $S' = 2V\cdot(-r^{-2}) + \frac{5}{3}\pi \cdot 2r = -\frac{2}{r^2}\left(\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3\right) + \frac{10}{3}\pi r = -2\pi h - \frac{4}{3}\pi r + \frac{10}{3}\pi r = -2\pi h + 2\pi r = 2\pi(-h + r)$ *(S': 0.5 P. / V einsetzen 0.5 P.)* $S' = 0$ $\Rightarrow$ $-h + r = 0$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{r = h}}$ *(0.5 P.)* Begründung für Minimum ($S''(r) > 0$ oder in Worten) *(1 P.)* <u>Variante:</u> $S' = 0$ nach r auflösen $\Rightarrow$ $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ $\Rightarrow$ r in h oder V einsetzen $\Rightarrow$ $h = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$; oder $\Rightarrow$ V in $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{5\pi}}$ einsetzen $\Rightarrow$ $r = h$.	3.5 P.