Fach Mathematik
Klasse(n) alle 5. Klassen

Dauer der Prüfung: 4 Std.
Erlaubte Hilfsmittel: Fundamentum Mathematik und Physik
Taschenrechner TI-83 Plus inkl. Applikation CtlgHelp

Vorbemerkungen:

- Die Lösungswege sind nachvollziehbar anzugeben. Ergebnisse ohne Begründung können mit 0 Punkten bewertet werden.
- Lösungen als Dezimalzahlen sind auf 2 Nachkommastellen zu runden.
- Jede Aufgabe muss auf ein separates Blatt gelöst werden. Teilaufgaben sind deutlich zu nummerieren.
- Es können maximal 63 Punkte erreicht werden. Die Note 6 wird für 55 Punkte erteilt.

Viel Erfolg wünschen Thomas Baier, Christian Boller, Philippe Meili, Bernhard Pfammatter und Andreas Stahel!

Aufgabe 1 Raumgeometrie (2 + 2 + 2 + 2 + 1.5 + 1 + 2 + 2.5 = 15 Punkte)

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Ecken A(6/4/–2), B(1/6/3) und C(2/–3/4).

a) Zeichnen Sie auf dem Beiblatt (Seite 6) das Dreieck ABC in das vorbereitete Koordinatensystem ein. Heben Sie die sichtbare Teilfläche farbig hervor.

► *Die Konstruktionslinien müssen deutlich erkennbar sein!*

► *Hinweis: Ein Punkt heisst sichtbar, wenn er im I. Oktanten liegt, d.h. seine drei Koordinaten alle grösser oder gleich Null sind.*

b) Das Dreieck ABC wird mit einem Punkt D zum Parallelogramm ABCD ergänzt. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D, ergänzen Sie Ihre Zeichnung zum Parallelogramm ABCD und heben Sie die jetzt zusätzlich sichtbare Fläche mit einer zweiten Farbe hervor.

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass das Parallelogramm ABCD kein Rhombus ist.

► *Hinweis: Der Rhombus wird auch Raute genannt.*

d) Die Seite $\overline{BC}$ durchstösst die x-z-Ebene im Punkt S. Berechnen Sie die Koordinaten von S.

e) Berechnen Sie den Winkel β (= Innenwinkel des Dreiecks ABC in der Ecke B).

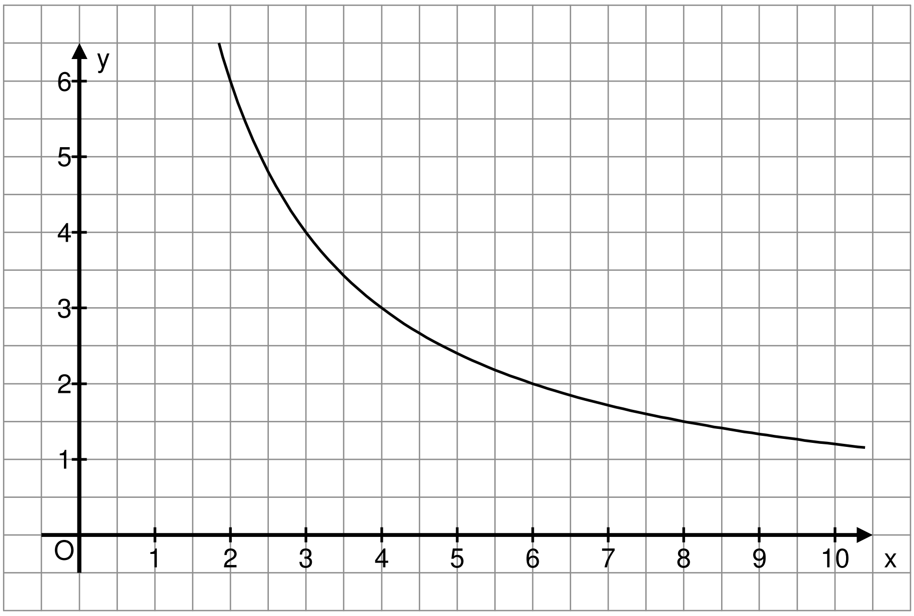
f) Welchen Flächeninhalt F besitzt das Dreieck ABC?

g) Der Punkt Q liegt so auf der y-Achse, dass das Dreieck QBA in der Ecke B einen rechten Winkel besitzt. Welche Koordinaten besitzt der Punkt Q?

h) Der Punkt R liegt so auf der Geraden durch die Punkte B und C, dass das Dreieck BRA gleichschenklig mit Basis $\overline{BR}$ ist. Wie lauten die Koordinaten von R?

Aufgabe 2 Integralrechnung (2 + 3 + 1 + 2.5 + 1.5 = 10 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \frac{3}{16}x^3 - 2x^2 + \frac{21}{4}x + 2$ und $g(x) = \dfrac{12}{x}$.



a) Im Koordinatensystem ist der Verlauf des Graphen der Funktion g bereits eingezeichnet. Tragen Sie für den Graphen der Funktion f mindestens 8 Punkte ein und verbinden Sie diese zu einer Kurve.

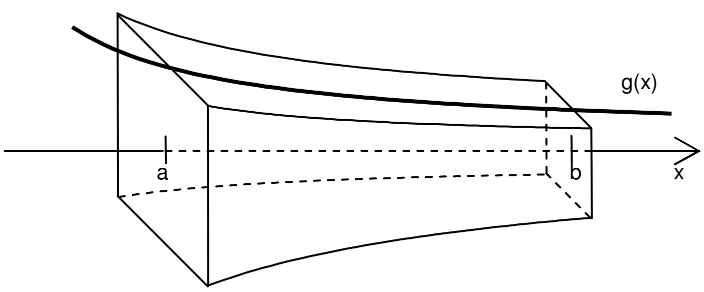
b) Aus der Teilaufgabe a) ist ersichtlich, dass die beiden Graphen von f und g im ersten Quadranten zwei kleine Flächenstücke begrenzen. Welches der beiden Flächenstücke ist grösser: das linke oder das rechte? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.

c) Nun rotiert der Graph der Funktion g zwischen a = 2 und b = 8 um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen V des so entstehenden Rotationskörpers.

d) Beim Rotationskörper aus Teilaufgabe c) soll a = 2 beibehalten, b jedoch variabel gehalten werden (b > a). Leiten Sie einen Term V(b) her, der beschreibt, wie das Rotationsvolumen von der Wahl von b abhängt. Untersuchen Sie schliesslich den Fall $b \to \infty$.

e) Der unten abgebildete Körper hat eine quadratische Querschnittsfläche, welche von links nach rechts kleiner wird. (Die Mittelpunkte der Quadrate liegen auf der x-Achse. Die Kanten der quadratischen Querschnittsflächen verlaufen „waagrecht nach hinten“ und „senkrecht nach oben“). Der Graph der Funktion g liegt in der oberen Mantelfläche des Körpers.

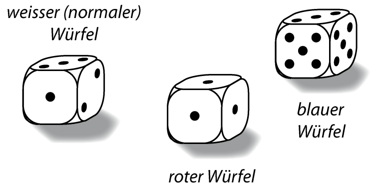
Berechnen Sie das Volumen V dieses Körpers, wenn er sich von a = 2 bis b = 8 erstreckt.



Aufgabe 3 Wahrscheinlichkeitsrechn. (1 + 1 + 1.5 + 1.5 + 3 + 3.5 + 1.5 + 2 = 15 Punkte)

Für ein bestimmtes Gesellschaftsspiel braucht man drei verschiedenfarbige Spielwürfel. Einer davon ist ein normaler Würfel, bei den beiden anderen sind die Augenzahlen abgeändert worden, nämlich:

weisser Würfel (normal):	1, 2, 3, 4, 5, 6
roter Würfel:	1, 1, 1, 6, 6, 6
blauer Würfel:	1, 1, 3, 5, 5, 6



Die Würfel sind alle homogen (d.h. jede der sechs Seitenflächen ist gleich wahrscheinlich).

a) Vervollständigen Sie die Tabelle mit den Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Augenzahlen:

	P(1)	P(2)	P(3)	P(4)	P(5)	P(6)
Weiss	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
Rot	1/2					
Blau						

Zuerst werden nur der rote und der blaue Würfel verwendet. Wer mit diesen zwei Würfeln zuerst einen Pasch (also mit beiden Würfeln die gleiche Augenzahl) wirft, darf beginnen.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass gleich der erste Wurf ein Pasch ist.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass erst der fünfte Wurf ein Pasch ist.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens einer der ersten 10 Würfe ein Pasch?

In jedem weiteren Spielzug darf man zwei der drei Würfel auswählen. Die mit diesen beiden Würfeln geworfene Augensumme bestimmt, wie weit die eigene Spielfigur vorwärts ziehen darf.

e) Mitspielerin A möchte zu einem bestimmten Zeitpunkt die Augensumme 8 werfen, um ein bestimmtes Spielfeld zu erreichen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit dafür, wenn sie den weissen und den blauen Würfel wählt? Und wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 8 mit den anderen beiden möglichen Würfelkombinationen?

f) Welche Würfelkombination ist am günstigsten, wenn man eine Augensumme von mindestens 10 erreichen möchte? Begründen Sie Ihre Antwort durch Rechnung.

g) Mitspieler B wählt seine beiden Würfel zufällig aus und wirft damit eine Doppelsechs (= Augensumme 12). Wie oft kann man ein solches Ergebnis in 200 Würfen erwarten?

h) Mitspieler C hat seine beiden Würfel ebenfalls zufällig ausgewählt und ist für drei aufeinander folgende Würfe bei dieser Auswahl geblieben. Jetzt ärgert er sich aber darüber, weil er in jedem der drei Würfe eine Doppeleins geworfen hat. Er erzählt dies seiner mathematisch begabten Freundin. Diese möchte nun aus diesen Angaben herausfinden, mit welcher Wahrscheinlichkeit ihr Freund die Würfelkombination rot/blau verwendet hat. Zu welchem Schluss kommt sie, wenn sie richtig rechnet?

Aufgabe 4 Folgen und Reihen (3 + 1 + 1 + 1.5 + 1.5 + 2 = 10 Punkte)

Ein angehender Student der Wirtschaftswissenschaften vergleicht die Lohnmodelle verschiedener Firmen. Mit Hilfe des Bildungsgesetzes bzw. der Rekursionsformel kann jeweils der Monatslohn in Schweizer Franken (CHF) im n-ten Jahr nach Anstellungsbeginn berechnet werden.

Firma A bietet: $a_n = 500n + 4500$.

Firma B bietet: $b_n = 5000 \cdot 1.08^{n-1}$.

Firma C bietet: $c_{n+1} = c_n + 90n + 45$ mit $c_1 = 5045$.

Für jedes Modell gilt: $1 \le n \le 30$.

Beispielsweise bedeutet a_1 den Monatslohn in CHF im 1. Anstellungsjahr bei der Firma A. b_9 steht für den Monatslohn im 9. Jahr nach der Anstellung in der Firma B. Nach Ablauf von 12 Monaten bzw. 1 Jahr wird der Monatslohn jeweils erhöht.

In den Teilaufgaben sind die Löhne auf ganze Franken zu runden.

a) Geben Sie für alle drei Lohnmodelle die Monatslöhne im 1., 2. und 3. Jahr nach der Anstellung an.

b) Im wievielten Arbeitsjahr n nach der Anstellung wird der Monatslohn in der Firma B erstmals 12'000 CHF übertreffen?

c) Im wievielten Arbeitsjahr n wird der Monatslohn in der Firma B erstmals grösser als derjenige in der Firma A?

d) Berechnen Sie mit dem Modell der Firma A die gesamte Lohnsumme, die ein Angestellter nach n = 10 Jahren verdient hat.

e) Zu welchem Zeitpunkt (ab Anstellung) übertrifft die total verdiente Lohnsumme bei der Firma A erstmals 1'500'000 CHF? Runden Sie auf einen Monat.

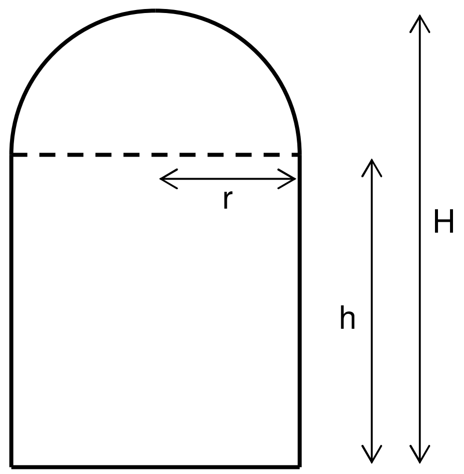
Bei Annahme der „1:12-Initiative" wäre der maximale Monatslohn nach oben begrenzt gewesen. Firma D bietet ein entsprechendes Lohnmodell an:

$$d_n = \frac{60'000n + 40'000}{2n + 18}.$$

f) Berechnen Sie den jeweiligen Monatslohn während der ersten drei Anstellungsjahre. Berechnen Sie den Grenzwert der Zahlenfolge (d_n) und interpretieren Sie diese Zahl.

Aufgabe 5 Extremwertaufgabe (1.5 + 1.5 + 1.5 + 4 + 1 + 3.5 = 13 Punkte)

Auf einem Bauernhof soll ein Futterweizensilo gebaut werden, das Platz für 110 Tonnen Futterweizen bieten soll. Die Form des Silos besteht aus einem Kreiszylinder mit Boden und einer Halbkugel (siehe Längsschnitt).



a) Welches Volumen besitzt ein derartiges Silo, wenn sein Durchmesser 5 m und seine Gesamthöhe 12 m messen?

b) Die Dichte von Futterweizen beträgt 700 kg/m^3. Haben im Silo aus der Teilaufgabe a) 110 Tonnen Futterweizen Platz?

c) Stellen Sie das Volumen V und den Oberflächeninhalt S des Silos als Funktion von r und h dar.

d) Das abgebildete Silo soll das Volumen 175 m^3 aufweisen. Der Oberflächeninhalt S soll minimal sein. Geben Sie in diesem Falle die Gesamthöhe H und den Radius r des Silos an.

e) Berechnen Sie mit dem Resultat aus Teilaufgabe d) die minimalen Materialkosten des Silos, wenn pro Quadratmeter Oberfläche 341 CHF gerechnet werden. Runden Sie den Betrag auf 5 Rappen.

f) Zeigen Sie für ein allgemeines Volumen V, dass bei minimalem Oberflächeninhalt gilt: h = r.

Beiblatt zur Aufgabe 1