Beiblatt zur Raumgeometrie

1.5P a)

2P b) S_x, S_y je 0.5P

Schraffur 1P

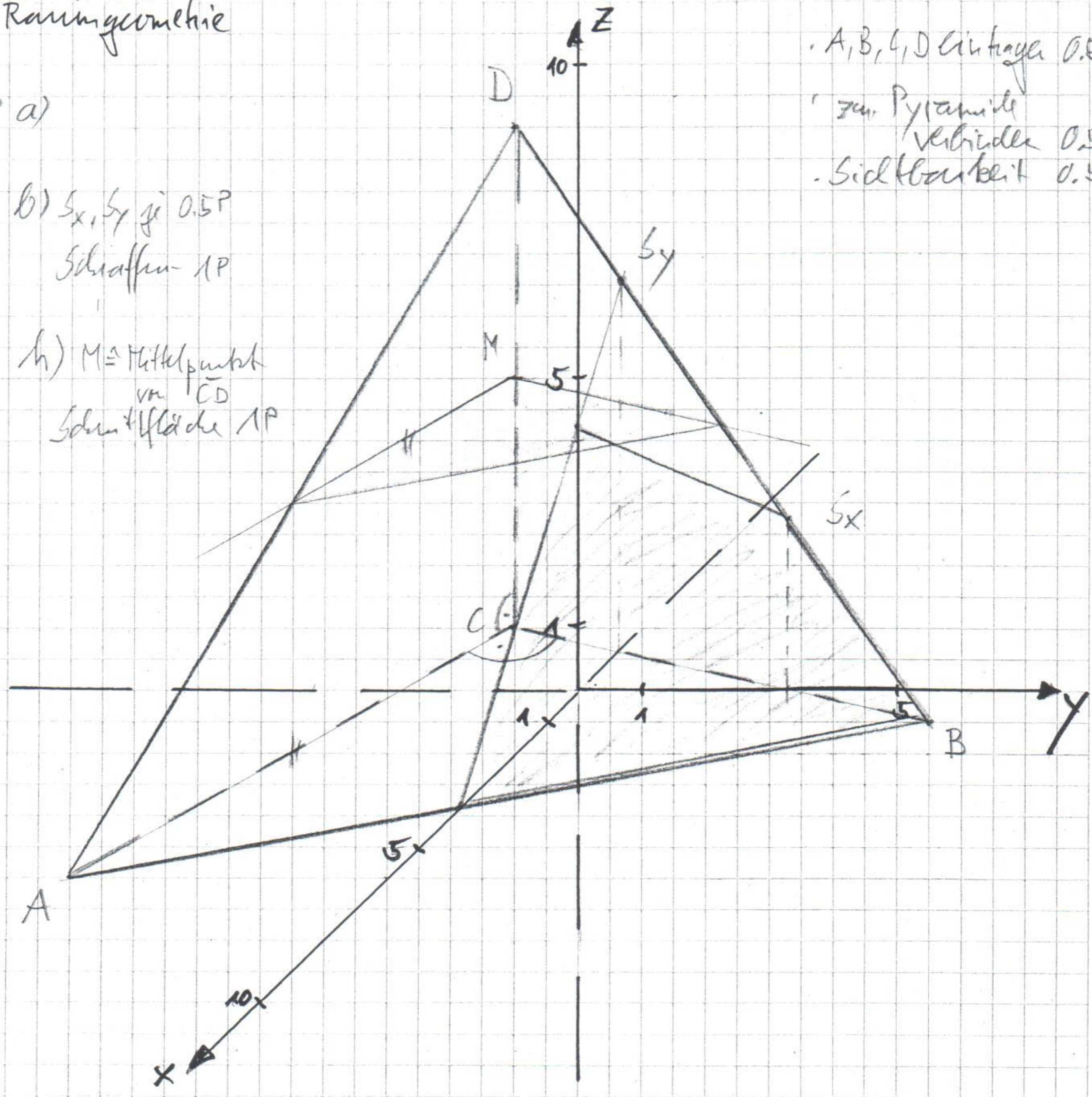
h) M = Mittelpunkt von $\overline{CD}$

Schnittfläche 1P

· A, B, C, D Eintragen 0.5P

· zur Pyramide verbinden 0.5P

· Sichtbarkeit 0.5P



2P c) $BD: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{BD}}$ 1

$x = 0: \Rightarrow t = \frac{1}{3}$ 1 $\Rightarrow \underline{\underline{S_x(0 | \frac{10}{3} | \frac{8}{3})}}$ $\frac{1}{2}$

oder

$y = 0: \Rightarrow t = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{S_y(-\frac{5}{4} | 0 | 6)}}$

Aufgabe 1 Raumgeometrie

2P d) $\overline{AC} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73} \approx 8.54$ $\frac{1}{2}$ $\qquad \overline{BC} = \sqrt{9+64} = \sqrt{73} = \overline{AC}$ $\frac{1}{2}$

$\overline{AB} = \sqrt{25+121} = \sqrt{146} \approx 12.08$

① $\Rightarrow \Delta ABC$ ist gleichschenklig mit Basis $\overline{AB}$.

② $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \Delta ABC$ ist rechtwinklig bei C. $\frac{1}{2}$

2P e) $\cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}}{\overline{AB} \cdot \overline{BD}} = \dfrac{\begin{pmatrix}5\\-11\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-3\\-8\\8\end{pmatrix}}{\sqrt{146} \cdot \sqrt{137}}$ 1 $= \dfrac{-15+88}{\sqrt{146 \cdot 137}} \approx 0.52 \Rightarrow \underline{\underline{\beta \approx 58.92^\circ}}$ $\frac{1}{2}$

2.5P f) $F_{\Delta ABC} = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2} = \dfrac{73}{2} = \underline{36.5}$ $\frac{1}{2}$ $\hat{=}$ Grundfläche G

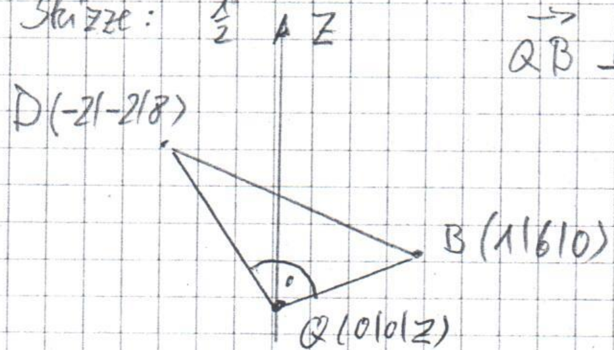
$F_{\Delta ACD} = F_{\Delta BCD} = \dfrac{8 \cdot \sqrt{73}}{2} = 4\sqrt{73} \approx \underline{34.18}$ $\frac{1}{2}$

$F_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{BD} \cdot \sin\beta$ $\frac{1}{2}$ $\approx \underline{60.57}$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{O}} = G + F_{\Delta ABD} + 2 \cdot F_{\Delta ACD} \approx \underline{\underline{165.42}}$ $\frac{1}{2}$

0.5P g) $\underline{\underline{V}} = \dfrac{G \cdot h}{3} = \dfrac{73 \cdot 8}{2 \cdot 3} = \underline{\underline{97.\overline{3}}}$ $\frac{1}{2}$ $\qquad$ mit $h = 8$

2.5P h) Skizze: $\frac{1}{2}$



$\overrightarrow{QB} \perp \overrightarrow{QD}$ d.h. $\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QD} = 0$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\6\\-z\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-2\\8-z\end{pmatrix} = 0$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -2 - 12 - 8z + z^2 = 0$

$z^2 - 8z - 14 = 0$ $\frac{1}{2}$

Formel / Programm: $z_1 \approx 9.48$; $z_2 \approx -1.48$ $\frac{1}{2}$

JA, es gibt zwei derartige Punkte auf der z-Achse, $\underline{\underline{Q_1(0|0|9.48)}}$ und $\underline{\underline{Q_2(0|0|-1.48)}}$ $\frac{1}{2}$

+

15P

Lösungsschlüssel Aufgabe 2: Differential-/Integralrechnung

	Gegeben: $f(x) = -\frac{3}{100000}x^3 + \frac{1}{100}x + 7$ und die Punkte A(-117.10/54) und B(0/7)	

a)	Ableitung :$\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = -\frac{9}{100000}\mathrm{x}^2 + \frac{1}{100}$	(0.5P)
	f'(-117.10) = -1.22	(0.5P)
	f'(0) = 0.01	(0.5P)

b)	Bedingung: $f'(x) = 0 = -\frac{9}{100000}x^2 + \frac{1}{100}$	
	$\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1000}{3}} \Rightarrow \pm 10.54$	(0.5P)
	Variante: Mit 'nDeriv', 'Table' oder 'minimum'	
	Der negative Wert ist der Gesuchte, da Schanze im 2. Quadranten:	
	$\Rightarrow f(-\sqrt{\frac{1000}{3}}) \Rightarrow 6.93 \Rightarrow$ T(-10.54/6.93)	(0.5P)

c)	Gegeben: $g(x) = \frac{5}{648}x^2 + \frac{10}{9}x + 40$, $k(x) = -\frac{1}{1000}(x+15)^2$, $G(x_G/54)$	
	Bedingung: $g(x) = 54 = \frac{5}{648}x^2 + \frac{10}{9}x + 40 \Rightarrow \frac{5}{648}x^2 + \frac{10}{9}x - 14 = 0$	(0.5P)
	Mit 'Calc' und 'zero' $\Rightarrow x_1 \Rightarrow$-155.66 und $x_2 \Rightarrow$11.66	
	Der negative Wert ist der Gesuchte, da Schanze im 2. Quadranten: $G(-155.66/54)$	(0.5P)

d)	Mit 'min' $\Rightarrow S_g(-72/0)$	(1P)
	Scheitelform: $y = a(x-u)^2 + v$ und S(u/v) $\Rightarrow S_k(-15/0)$, Variante: mit 'min'	(1P)

e)	$f(x) = k(x)$ mit 'intersect' $\Rightarrow L(83.67/-9.74)$	(1P)

f)	$k'(x) = -\frac{1}{500}(x+15) = -\frac{x}{500} + \frac{3}{100}$	(0.5P)
	$\Rightarrow -\frac{9}{100000}x^2 + \frac{1}{100} = -\frac{x}{500} - \frac{3}{100} \mid +\frac{3}{100} + \frac{x}{500}$, Variante: mit 'intersect'	(1P)
	$\Rightarrow -\frac{9}{100000}x^2 + \frac{1}{500}x + \frac{1}{25} = 0 \Rightarrow 9x^2 - 200x - 4000 = 0$	
	Mit 'GRAPH', 'CALC', 'zero' $\Rightarrow x_1 \Rightarrow$-12.72 und $x_2 \Rightarrow$34.94	(1P)
	Bei x_1 und x_2 haben f und k die gleiche Steigung.	(0.5P)

g)	Gegeben: $h(x) = 5\cos(0.1x)$, Breite b = 4.5	
	Dichte: $\varrho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \varrho \cdot V$, $V = F \cdot b$	(0.5)
	Berechnung von F:	
	$F = \int_{-117.10}^{0} f(x) \cdot dx + (-117.10 + 155.66) \cdot 54 - \int_{-155.66}^{-72} g(x) \cdot dx - \int_{x_{h,0}}^{0} h(x) \cdot dx$	(1P)
	Nullstelle von $h(x)$: $x_0 \Rightarrow$-15.71	(0.5P)
	$\Rightarrow$ mit '$\int f(x)dx$', F $\Rightarrow$2161.36 + 2082.24 - 1506.01 - 50 = 2687.59 m^2	
	$\Rightarrow m = 7256493\ kg \Rightarrow 7260\ t$	(0.5)

A3 Lösungen Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik

$26 \cdot 2$ Buchstaben (gross / klein) + 10 Ziffern = 62 Zeichen

a) 5 stelliger Code : $62^5 = 916132832$ Möglichkeiten (1)

b) 3 / 11 / 65 hat $3! = 6$ Anordnungsmöglichkeiten (1)

c) 3 11 65 hat $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Möglichkeiten (1)

P(Tim knackt Passwort genau beim 3. Versuch) $= \frac{59}{60} \cdot \frac{58}{59} \cdot \frac{1}{58} \approx 1.\overline{6}$ %

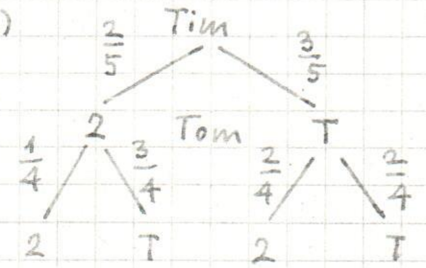
(1)

d) Zwei Zeichen ○○△△△ sind im Spiel :

$\frac{5!}{2!3!} = 4 \cdot 5 : 2 = 10$ Versuche pro Zeichenpaar, 62 fürs erste, 61 fürs zweite Zeichen also (1)

$62 \cdot 61 \cdot 10 = 37820$ Möglichkeiten . (1)

e)



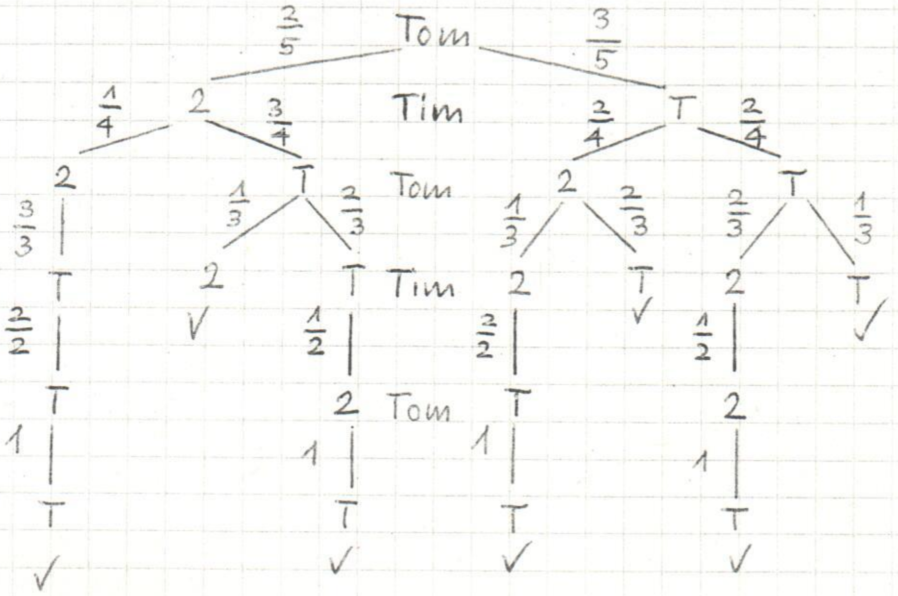
(1) Baum

P(Tim gewinnt) = P(Tim 2) $= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$

(0,5) $= \frac{3}{10}$ oder 30%

(0,5) P(Tom gewinnt) $= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10} \Rightarrow$ fair

f) Tom beginnt :



„Gewinnbaum für Tom"

7 gute Pfade

(2)

P(Tom gewinnt) $= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot 1 + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}\cdot 1$

(1) $+ \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3} = 80\%$ (1)

g) Tom beginnt : $P(\text{Tim gewinnt} \mid \text{Tom } 2) = \, ?$

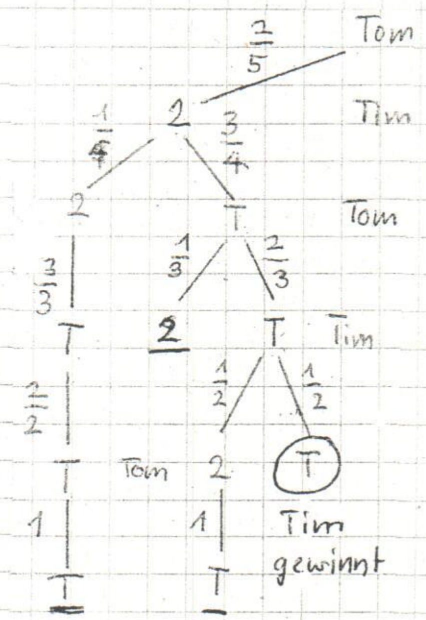
Zum Baum aus f) kommt der Gewinnpfad für Tim dazu : $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$

2 T T T
Tom Tim Tom Tim (gewinnt) (1)

Die restlichen Pfade mit „Tom zieht 2 zu Beginn" haben alle $\frac{1}{10}$ Wahrscheinlichkeit, insgesamt 4 solche Pfade:

$$P(\text{Tim gewinnt} \mid \text{Tom } 2) = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}} \text{ oder } \underline{\underline{25\%}}$$

(1)



(1/4)

4) a) $d_a = 12\,mm \rightarrow r_{a_1} = 6\,mm \rightarrow r_{a_2} = 5{,}8\,mm \rightarrow r_{a_3} = 5{,}6\,mm$

$d_i = 6\,mm \rightarrow r_i = 3\,mm$

$$\Rightarrow \frac{r_{a_1} - r_i}{0{,}2\,mm} = \frac{3\,mm}{0{,}2\,mm} = \underline{\underline{15 \text{ Ringe}}}$$ (1/2) (1/4)

$\boxed{1P}$ d.h. falls Durchmesser statt Radius 0,75P

b) $A_1 = r_{a_1}^2 \cdot \pi - r_{a_2}^2 \cdot \pi = (r_{a_1}^2 - r_{a_2}^2)\pi$ (1/2)

113,097 $= (6^2 - 5{,}8^2)\pi = \underline{\underline{2{,}36 \cdot \pi\ mm^2}}$ $\boxed{1{,}5P}$

(1/2) oder $\approx \underline{\underline{7{,}414\,mm^2}}$ (1/2)

d statt r 1,25P

c) $A_2 = r_{a_2}^2 \cdot \pi - r_{a_3}^2 \cdot \pi = (r_{a_2}^2 - r_{a_3}^2)\cdot\pi$

$= (5{,}8^2 - 5{,}6^2)\cdot\pi = \underline{\underline{2{,}28 \cdot \pi\ mm^2}}$ $\boxed{1P}$

(1/2) oder $\approx \underline{\underline{7{,}163\,mm^2}}$ (1/2)

d statt r 0,75P

d) Test: Dritter Kreisring

$A_3 = (5{,}6^2 - 5{,}4^2)\cdot\pi = 2{,}20\cdot\pi$

Betrachte die Folge $2{,}36 \rightarrow 2{,}28 \rightarrow 2{,}20$

$d = -0{,}08$ $d = -0{,}08$

(1/4)

Also arithmetische Folge mit $A_1 = 2{,}36\pi$ (7,414) (1/4) $\boxed{2{,}5P}$

(Einheit jeweils mm^2) und $d = -0{,}08\pi$ (−0,251) (1/2) d statt r 2,25P

$\Rightarrow \underline{A_n} = 2{,}36\pi - (n-1)\cdot 0{,}08\pi$ (1) oder ähnliche Form (*)

$= \underline{\underline{(2{,}44 - 0{,}08n)\cdot\pi\ mm^2}}$ (1/2) einfachste Form (**)

1x → −0,25P
Falls mm^2 fehlt: 2-3x → −0,5P

(*) z.B. $A_n \approx 7{,}414 - 0{,}251(n-1)$ ergibt total 2P

(**) auch $A_n \approx 7{,}665 - 0{,}251 \cdot n$ ergibt auch max. Punktzahl 2,5P

4) e) Da der äusserste der 15 Kreisringe rot ist ist auch der innerste rot, daher gibt es 8 rote Kreisringe

Betrachte $2{,}36 \to 2{,}20$

$d = -0{,}16$ 1/4

$$A_r = S_8 = \left(2{,}36 \cdot 8 + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot (-0{,}16)\right)\pi = \underline{14{,}4\pi \ mm^2}$$

1/2

oder $\approx 45{,}24 \ mm^2$ 1/4

ganze Iris: $A_i = (r_{a_1}^2 - r_i^2)\pi$

$$= (6^2 - 3^2)\pi = \underline{27\pi \ mm^2}$$

1/4

oder $\approx \underline{84{,}82 \ mm^2}$ 1/4

$$\Rightarrow \frac{A_r}{A_i} = \frac{14{,}4\cancel{\pi}}{27\cancel{\pi}} = 0{,}5\overline{3} = \underline{\underline{53{,}\overline{3}\,\%}}$$

1/4 1/4

das ist $\frac{8}{15}$

$\boxed{2P}$

Falls d statt r 1,75P

Test: nehmen 17 Kreisringe

$\to$ 9 rot

$$A_r = \left(2{,}36 \cdot 9 + \frac{9 \cdot 8}{2}(-0{,}16)\right)\pi = 15{,}48\pi$$

$$A_i = (6^2 - 2{,}6^2)\pi = 29{,}24\pi$$

$$\frac{A_r}{A_i} = 52{,}94 = \frac{9}{17}$$

Aufgabe 5 Extremwertaufgabe

1.5P a) $\underline{\underline{V_B}} = \underbrace{\frac{2\pi r^3}{3}}_{V_{HK}} + \underbrace{\pi r^2 \cdot \cancel{2}h}_{V_Z} + \underbrace{\frac{\pi}{3} r^2 \cdot 2r}_{V_{Ke}}$ $\frac{1}{2}$

(Gesamthöhe $H = 3r + h = 5r$
$H = 2.5m$)

$= \frac{4}{3}\pi r^3 + 2\pi r^3 = \frac{10}{3}\pi r^3 \approx \underline{\underline{1.31\,m^3}}$ 1

1.5P b) Geg: $r = 0{,}4\,m$, $V_B = 1\,m^3$ $\quad (V_{Ke} = \frac{2}{3}\pi r^3)$

$V_B = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \cdot h + \frac{2}{3}\pi r^3$

$\Rightarrow 1 = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$ $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow h = \frac{1 - \frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2} = \frac{1}{\pi r^2} - \frac{4}{3} r$

$\underline{h \approx 1{,}46\,m}$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{H}} = 3r + h \approx \underline{\underline{2{,}66\,m}}$ $\frac{1}{2}$

2P c) Geg: $h = 0\,m$, $V_B = 1\,m^3$

$\Rightarrow V_B = \frac{4}{3}\pi r^3 = 1$ $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow r^3 = \frac{3}{4\pi}$ $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow \underline{\underline{r}} = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi}} \approx \underline{\underline{0{,}62\,m}}$ $\frac{1}{2}$

Skizze: Die Boje besteht nur aus einer Halbkugel mit aufgesetztem Kreiskegel

$\frac{1}{2}$

4.5P d) $O_B = O_{HK} + M_Z + M_{Ke} = 2\pi r^2 + 2\pi r h + \pi r s = O(r, h, s)$ 1

NB: (1) $h = \frac{1}{\pi r^2} - \frac{4}{3} r$ (vgl. b)) $\frac{1}{2}$

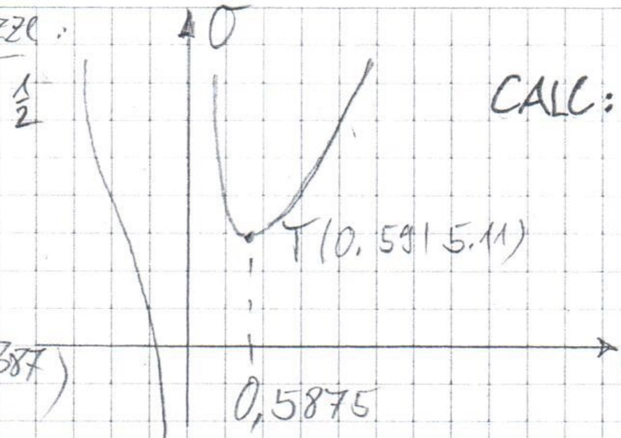
(2) $s = \sqrt{4r^2 + r^2} = r \cdot \sqrt{5}$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow O_B(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{1}{\pi r^2} - \frac{4}{3} r\right) + \pi \sqrt{5} \cdot r^2$ 1

$= 2\pi r^2 + \frac{2}{r} - \frac{8}{3}\pi r^2 + \pi \cdot \sqrt{5}\, r^2$

$O_B(r) = \underbrace{\pi\left(\sqrt{5} - \frac{2}{3}\right)}_{4{,}93} \cdot r^2 + \frac{2}{r}$

d) (Forts.) Skizze: $\frac{1}{2}$



($h_{optimal} \approx 0{,}1387$)

CALC: minimum

Für $\underline{\underline{r_{min} \approx 0.59\,m}}$ wird der Oberflächeninhalt minimal. $\frac{1}{2}$

$\underline{O_{min} \approx 5{,}11\,m^2}$

$\Rightarrow$ Gesamthöhe der optimalen Boje $\underline{\underline{H \approx 1{,}90\,m}}$ $\frac{1}{2}$

2,5P e) $O_B(r) = \pi\left(\sqrt{5}-\frac{2}{3}\right)\cdot r^2 + 2r^{-1}$ $\frac{1}{2}$; $O_B'(r) = 2\pi\left(\sqrt{5}-\frac{2}{3}\right)r - 2r^{-2}$ $\frac{1}{2}$

$O_B''(r) = 2\pi\left(\sqrt{5}-\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{r^3}$ $\frac{1}{2}$

$O_B'(r) = 0$: $\Rightarrow$ $2\pi\left(\sqrt{5}-\frac{2}{3}\right)r = \frac{2}{r^2}$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \left(r = \sqrt[3]{\frac{\cancel{2}1}{\cancel{2}\pi\left(\sqrt{5}-\frac{2}{3}\right)}} \approx 0{,}5875 \right)$ siehe d)

und $O_B''(0{,}59) > 0$ $\frac{1}{2}$

also liegt ein Minimum vor.

+

$\underline{\underline{12P}}$