Fach Mathematik
Klasse(n) alle 5. Klassen

Dauer der Prüfung: 4 Std.
Erlaubte Hilfsmittel: Fundamentum Mathematik und Physik
Taschenrechner TI-83 Plus inkl. Applikation CtlgHelp

Vorbemerkungen:

- Die Lösungswege sind nachvollziehbar anzugeben. Ergebnisse ohne Begründung können mit 0 Punkten bewertet werden.
- Lösungen als Dezimalzahlen sind auf 2 Nachkommastellen zu runden.
- Jede Aufgabe muss auf ein separates Blatt gelöst werden. Teilaufgaben sind deutlich zu nummerieren.
- Es können maximal 61 Punkte erreicht werden. Die Note 6 wird für 54.5 Punkte erteilt.

Viel Erfolg wünschen Barbara Fankhauser, Markus Maurer, Bernhard Pfammatter und Andreas Stahel!

Aufgabe 1 Raumgeometrie (1.5 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2.5 + 0.5 + 2.5 = 15 Punkte)

Gegeben sind die vier Punkte A(6/ī 5/0), B(1/6/0), C(ī 2/ī 2/0) und D(ī 2/ī 2/8). Die ersten drei bilden die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze D.

a) Tragen Sie A, B, C, D in das beiliegende Koordinatensystem ein, verbinden Sie die Punkte zur Pyramide P und heben Sie deren sichtbare Kanten farbig und die unsichtbaren Kanten farbig gestrichelt hervor.

b) Konstruieren Sie denjenigen Teil des Dreiecks ABD, der sichtbar ist, also ganz im 1. Oktanten liegt. Schraffieren Sie diesen Teil mit einer weiteren Farbe.

3 *Alle Konstruktionslinien müssen deutlich erkennbar sein!*

3 *Hinweis: Ein Punkt heisst sichtbar, wenn er im 1. Oktanten liegt, d.h. seine drei Koordinaten alle grösser oder gleich Null sind.*

c) Die Pyramidenkante $\overline{BD}$ durchstösst die xz-Ebene im Spurpunkt S_y. Berechnen Sie die Koordinaten von S_y.

d) Beweisen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

e) Berechnen Sie im Dreieck ABD den Winkel β bei der Ecke B.

f) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt *O* der Pyramide P.

g) Wie gross ist das Volumen *V* von P?

h) ĂAuf der z-Achse gibt es Punkte, von denen aus die Pyramidenkante $\overline{BD}$ unter einem rechten Winkel erscheint.ñBegründen oder widerlegen Sie diese Aussage.

Aufgabe 2 Differential- / Integralrechnung (1.5 + 1 + 1 + 2 + 1 + 3 + 2.5 = 12 Punkte)

Für ein Skispringen soll eine Sprungschanze aus Schnee und Holz gebaut werden.
Der Anlauf der Schanze verläuft vom Punkt A(ī 117.10/54) auf dem Graphen der Funktion

$$f(x) = -\frac{3}{100'000}x^3 + \frac{1}{100}x + 7$$

bis zum Punkt B(0/7). Bei B erfolgt der Absprung der Skispringer (siehe Beiblatt).

a) Berechnen Sie die Steigung des Schanzenanlaufs beim Start und beim Absprung, also in den Punkten A und B. Für diesen Aufgabenteil dürfen die TI-83-Befehle "Calculate: dy/dx" und "nDeriv" nicht verwendet werden.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes T des Schanzenanlaufs.

Das Profil des Hügels, auf dem die Schanze gebaut werden soll, entspricht dem Graphen der Funktion

$$g(x) = \frac{5}{648}x^2 + \frac{10}{9}x + 40$$

vom Punkt G(x_G /54) bis zum Scheitelpunkt S_g von *g*. Rechts anschliessend verläuft der Hügel ein gewisses Stück horizontal bis zum Scheitelpunkt S_k der Parabel mit der Gleichung

$$k(x) = -\frac{1}{1'000}(x+15)^2 .$$

Danach entspricht das Hügelprofil dem Graphen der Funktion *k*.

3 *Tipp: Färben Sie dieses Hügelprofil auf dem Beiblatt ein.*

c) Berechnen Sie die x-Koordinate des Punktes G.

d) Wie lauten die Koordinaten der Scheitelpunkte S_g von *g* und S_k von *k*?

e) In welchem Punkt L würde ein Skispringer landen, dessen Flugbahn dem Graphen der Funktion *f* entspricht?

f) Geben Sie die Gleichung der 1. Ableitungsfunktion *k'* an.

Setzen Sie $f'(x) = k'(x)$ und lösen Sie diese Gleichung. Was bedeuten diese Lösungen?

Beschreiben Sie in *einem* Satz.

Die Schanze wird so konstruiert, dass unter dem Absprungtisch des Schanzenanlaufs Holz zur Verstärkung verwendet wird. Dieser Holzteil wird durch je ein Stück der x- und der y-Achse sowie der Graphen der Funktionen *k* und

$$h(x) = 5 \cdot cos(0.1x)$$

eingeschlossen.

Der gesamte Anlauf dieser Sprungschanze ist 4.5 m breit.

g) Schnee hat die durchschnittliche Dichte 600 kg/m^3. Berechnen Sie die Masse Schnee, die benötigt wird, um diese Schanze zu bauen.

Aufgabe 3 Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik (1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 + 2 = 14 Punkte)

Tom soll seinen Computer mit einem fünfstelligen Passwort sichern. Er darf als Zeichen die 26 Buchstaben unseres Alphabets (gross und klein werden unterschieden) und die zehn Ziffern 0 bis 9 brauchen.

a) Wie viele verschiedene Passwörter kann er erfinden?

b) Das Geburtsdatum von Toms Mutter ist 3.11.65. Er nimmt diese 5 Ziffern als Passwort, und er lässt dabei 11 für November und 65 für das Geburtsjahr zusammen, da er sich sonst den Code nicht merken kann. Tim sagt zu Tom, er sei blöd, da man dieses Passwort sehr schnell knacken kann. Wie viele verschiedene Passwörter kann man damit schreiben?

c) Darauf trennt Tom 11 und 65 in einzelne Ziffern auf und kombiniert die Zahlen wild durcheinander. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Tim das Passwort genau beim dritten Versuch knackt?

d) Tom ändert sein Passwort nochmals. Tim weiss nur, dass Tom lediglich zwei verschiedene Zeichen für sein Passwort genommen hat, davon eines zweimal, das andere also dreimal. Wie viele Versuche braucht Tim im schlimmsten Fall, bis er Toms Passwort geknackt hat?

e) Das Passwort lautete ĂT2T2Tñ Tim und Tom starten nun folgendes Spiel: Sie ziehen je einmal nacheinander ohne Zurücklegen aus der Urne mit ĂT2T2Tñ Gewonnen hat, wer eine der beiden 2 erwischt. Tim darf zuerst ziehen, der Zug bleibt aber verdeckt. Erst nachdem Tom gezogen hat, werden die Züge verglichen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Tim das Spiel? Tom klagt nachher, das Spiel sei nicht fair. Stimmt das?

f) Tom will das Spiel ändern: Sie sollen abwechselnd mehrmals ziehen. Gewonnen hat, wer zuerst zwei gleiche Zeichen gezogen hat. Tom beginnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt er das Spiel?

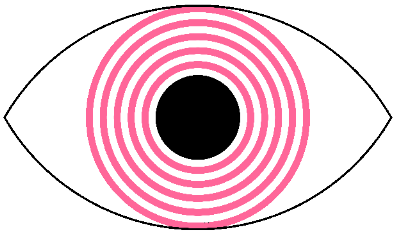
g) Es beginnt immer noch Tom. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Tim das Spiel, wenn Tom als erstes Zeichen eine 2 erwischt?

Aufgabe 4 Folgen und Reihen (1 + 1.5 + 1 + 2.5 + 2 = 8 Punkte)

In einem Geschäft für Scherzartikel gibt es speziell gefärbte Kontaktlinsen. Eine Kontaktlinse bedeckt die Iris (Regenbogenhaut) mit farbigen Kreisringen. Im folgenden Beispiel wechseln sich von aussen nach innen rote und weisse Kreisringe ab. Der Durchmesser der Iris beträgt 12 mm, derjenige der Pupille 6 mm. Die Kreisringe haben eine Breite von 0.2 mm. (Die abgebildete Anzahl Kreisringe entspricht nicht der Realität der Kontaktlinse.)

a) Wie viele farbige Kreisringe (rot und weiss) hat die Kontaktlinse?

b) Wie gross ist der Flächeninhalt des ersten (äussersten) Kreisrings (rot)?



c) Wie gross ist der Flächeninhalt des zweiten (zweitäussersten) Kreisrings (weiss)?

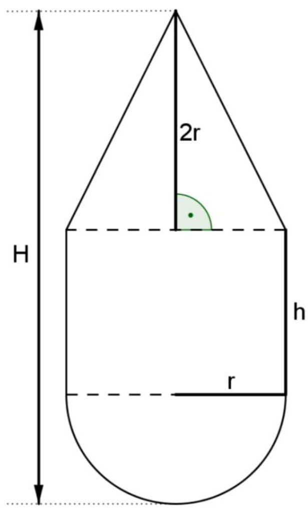
d) Geben Sie einen Term zur Berechnung des Flächeninhalts des n-ten Kreisrings an. Vereinfachen Sie diesen Term so weit als möglich.

e) Wie viel Prozent der Iris ist rot gefärbt?

Aufgabe 5 Extremwertaufgabe (1.5 + 1.5 + 2 + 4.5 + 2.5 = 12 Punkte)

In der Seefahrt werden Signalbojen verwendet. Diese können unterschiedliche Form haben. Zum Beispiel ein Körper, der aus einer Halbkugel mit Radius r, einem aufgesetztem Zylinder mit Höhe h und einem darüber errichteten Kreiskegel mit Höhe $2r$ besteht (vgl. Figur).

a) Berechnen Sie das Volumen der Boje, falls der Radius der Halbkugel $r = 0.5$ m beträgt und $h = 2r$ gilt.



Für die Aufgabenteile b) bis e) soll die Boje stets das Volumen 1 m^3 aufweisen.

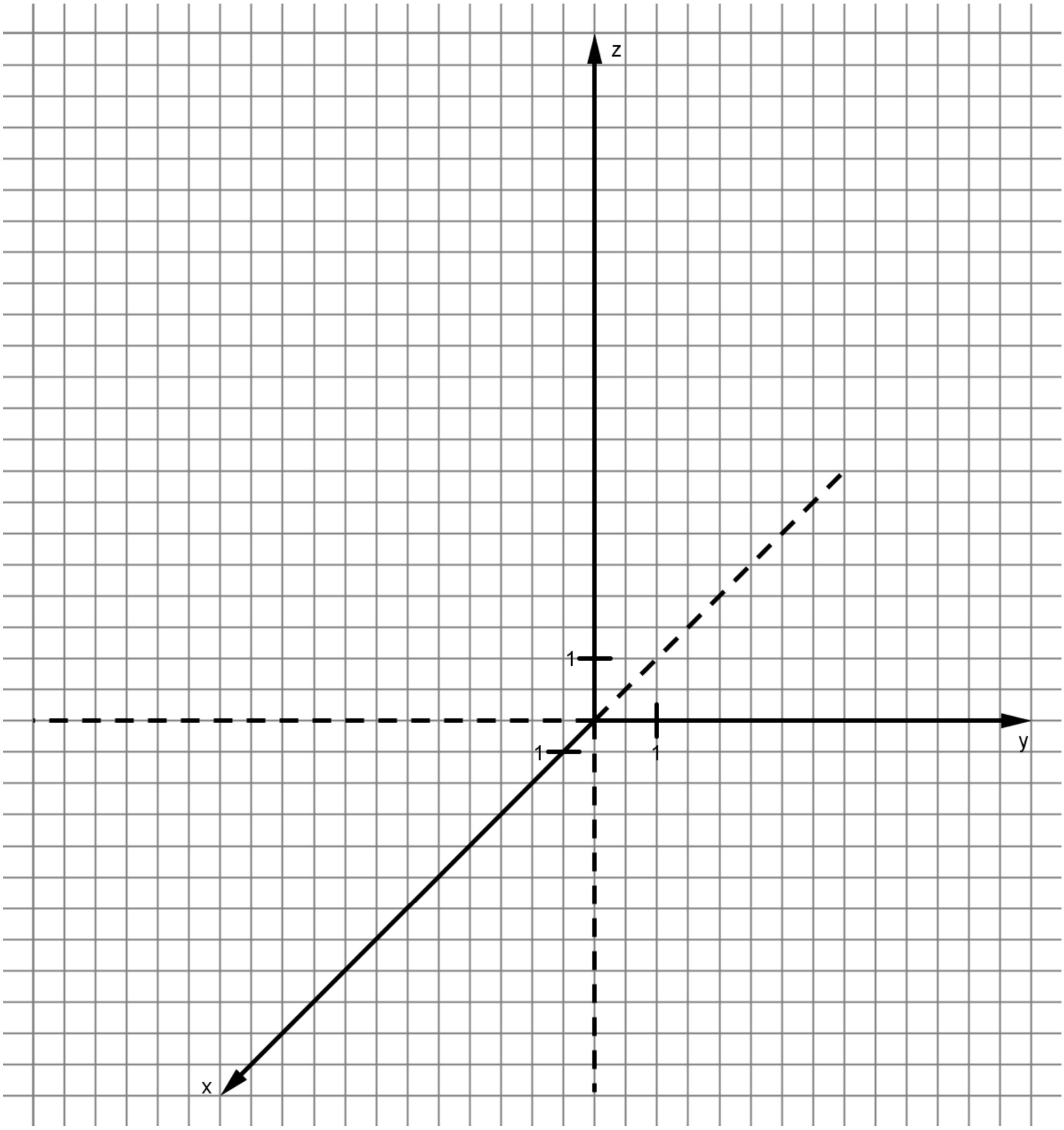
b) Der Halbkugelradius misst $r = 0.4$ m. Berechnen Sie die Gesamthöhe H der Boje.

c) Berechnen Sie den Radius r der Boje, falls die Zylinderhöhe h null wird. Skizzieren Sie diese Boje.

d) Auch aus physikalischen Gründen sollte der Inhalt O der Oberfläche der Boje minimal sein. Berechnen Sie den optimalen Halbkugelradius $r_{\min}$ und geben Sie diesen minimalen Oberflächeninhalt $O_{\min}$ an.
Skizzieren Sie den Graphen der Zielfunktion.
Welche Gesamthöhe hat die Boje nun?

e) Klären Sie algebraisch ab, dass es sich bei $r_{\min}$ aus Aufgabenteil d) um das Minimum handelt.

Beiblatt zur Aufgabe 1



Beiblatt zur Aufgabe 2