1)

1. Folgen, Mächte, Grenzwerte   Lösungen / Punkte

a) Geometrische Folge mit $a_1 = 60 \quad a_2 = 56$

Konstanter Faktor q $60 \xrightarrow{\cdot q} 56 \xrightarrow{\cdot q} \dots \xrightarrow{\cdot q}$ erkannt , 1/2

$q = \frac{56}{60} = \frac{14}{15} \approx 0{,}9\overline{3}\dots$ korrekt berechnet , 1/2

2

Rekursiv : $a_1 = 60 \qquad a_{n+1} = a_n \cdot \frac{14}{15}$

Explizit : $a_n = 60 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^{n-1}$ 1

---

b) • Lösung durch Probieren:

60 Enter : Ans $\cdot \frac{14}{15}$ Enter, Enter, Enter ... mitzählen 1,5

oder $60 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^{15} = 21{,}3\dots \qquad 60 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^{16} = 19{,}89\dots \quad \rightarrow \underline{\underline{n = 17}}$

Dokumentation: 1

1,5

• Oder mit Liste   seq $(60 \cdot (14/15)\,\hat{}\,(X-1), X, 1, 100) \rightarrow L_1$

In L_1 nachsehen : $L_1(16) = 21{,}3\dots \qquad L_1(\underline{\underline{17}}) = 19{,}89\dots$ 1

• Oder algebraisch

$60 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^{n-1} < 20$ 1

2,5

$\left(\frac{14}{15}\right)^{n-1} < \frac{1}{3} \qquad \left(\frac{14}{15}\right)^{x} = \frac{1}{3} \qquad x = \frac{\log 1/3}{\log 14/15} = 15{,}92\dots$ 1

$\rightarrow n - 1 = 16 \quad \underline{\underline{n = 17}}$; 1/2

---

c) $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 800$

• Erstellen der Liste für $\{a_1, a_2 \dots\}$ (siehe b)) 1,5

cumsum davon $\rightarrow L_2$ Nachsehen $L_2(32) = 801{,}049\dots$

$L_2(31) = 793{,}981\dots \quad \rightarrow$ Am $\underline{32.\ \text{Tag}}$ 1,5

3

• Oder mittels Summenformel

$s_n = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1} = \frac{60 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^n - 60}{\frac{14}{15} - 1} = \frac{60}{-1/15}\left(\left(\frac{14}{15}\right)^n - 1\right) = 900 \cdot \left(1 - \left(\frac{14}{15}\right)^n\right)$ 1,5

$\rightarrow$ Durch Probieren : $n^* = 31{,}85\dots \quad s_{n^*} = 800 \quad \rightarrow \underline{\underline{n = 32}}$ 1,5

$\rightarrow$ Durch Logarithmieren: $900\left(1 - \left(\frac{14}{15}\right)^{n^*}\right) = 800 \qquad 1 - \left(\frac{14}{15}\right)^{n^*} = \frac{8}{9}$

$\left(\frac{14}{15}\right)^{n^*} = \frac{1}{9}$ (1) $\qquad n^* = \frac{\log 1/9}{\log 14/15} = 31{,}85\dots \qquad \underline{\underline{n = 32}}$ 1,5

Erläuterung: Er meint die Konvergenz der Reihe für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert. 1

d) 2 Varianten, die beide volle Punktzahl ergeben

- A Summe der geometrischen Reihe minus Hinweg (800) → 100 km
- B " " " " minus 32 Etappen (801,05) → 98,95 km

Die geometrische Reihe konvergiert gegen $\frac{a_1}{1-q} = \frac{60}{1-\frac{14}{15}} = 900$ 2

4

→ Es verbleiben noch $\underline{\underline{100\text{ km}}}$ 1

→ Es verbleiben noch $900 - 801{,}05\ (s_{32}) = \underline{\underline{98{,}95\text{ km}}}$ (1)

---

e) Arithmetische Folge 1. Ordnung a_1 unbekannt

1. Tag a_1 2. Tag a_1+1 3. Tag a_1+2 ...... 32. Tag: a_1+31 1

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_{32} = 800$ 1

$(a_1 + a_{32}) + (a_2 + a_{31}) + \ldots + (a_{16} + a_{17}) = 800$

$(a_1 + a_{32}) = \frac{800}{16} = 50$ 2

$a_1 + a_1 + 31 = 50 \quad 2a_1 = 19 \quad \underline{\underline{a_1 = 9{,}5}}$ 1,5

Rekursiv $\underline{\underline{a_1 = 9{,}5 \quad a_{n+1} = a_n + 1}}$ 1

6,5

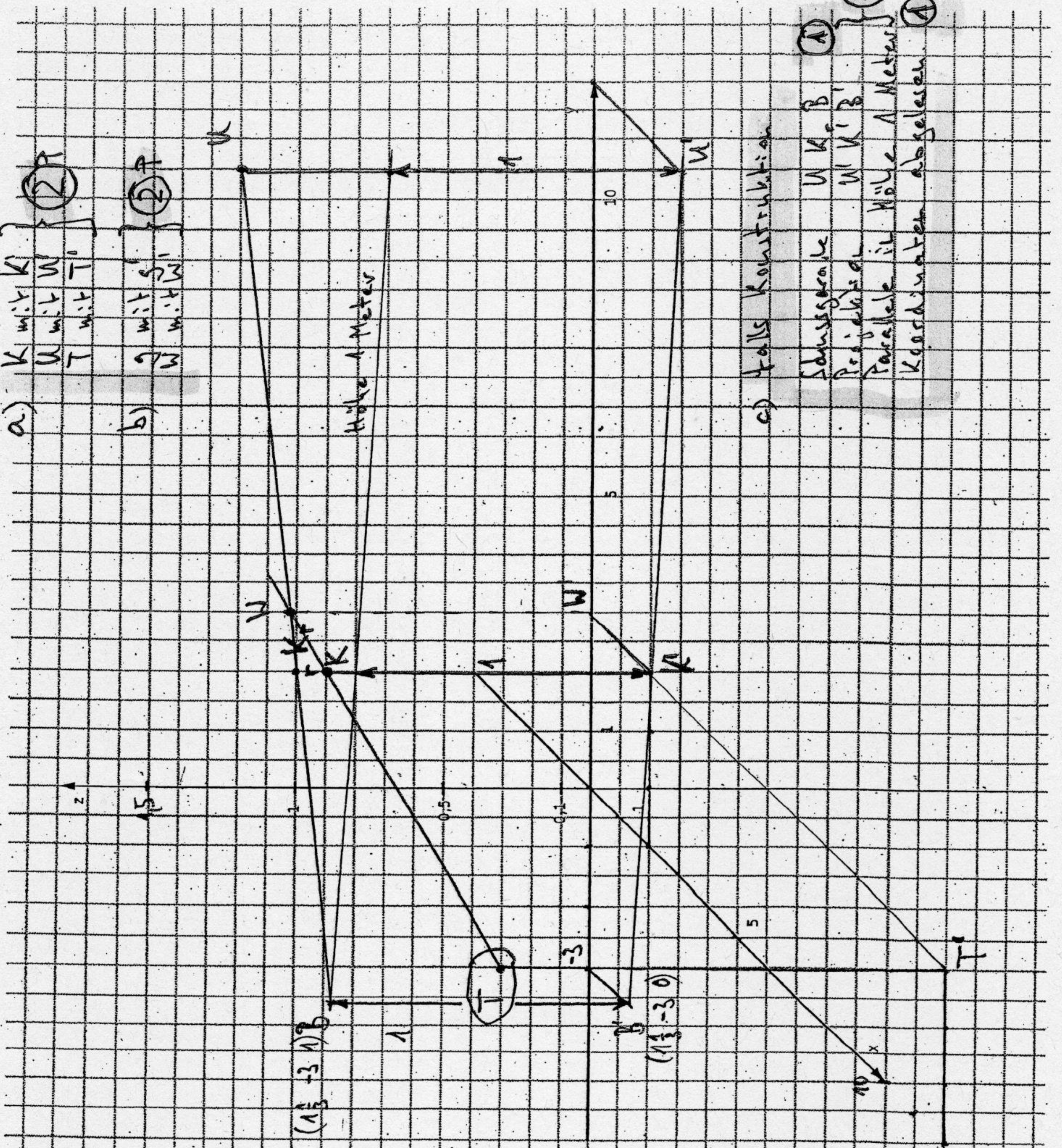
Explizit $\underline{\underline{a_n = 9{,}5 + (n-1) \cdot 1}}$ (1)

18,5

2a)
b1)

Als Seite 3.

Anhang: Beiblatt zur Aufgabe 2



2)

Berechnungen Vektorgeometrie Nr. 2

4,5

b) Berechnung von W

Gleichung der Gerade $\overline{TK}$: $\begin{pmatrix}12\\3\\1{,}5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-10\\0\\-0{,}4\end{pmatrix}$ (1) (1) $\leftarrow x=0$ (0,5)

$t=1{,}2$ (1) $W(0\ \ 3\ \ 1{,}02)$ (1)

3,5

c) Berechnung von B

Gleichung der Gerade $\overline{UK_r}$: $\begin{pmatrix}3\\12\\1{,}5\end{pmatrix}$ (0,5) $+ t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-9\\-0{,}3\end{pmatrix}$ (0,5) $\leftarrow z=1$ (0,5)

$t=\frac{5}{3}$ (1) $B(\frac{4}{3}\ \ -3\ \ 1)$ (1)

Punkte nur einmal: <u>entweder</u> Berechnung <u>oder</u> Konstruktion.

3

d) $|\overrightarrow{TK}| = \sqrt{(-10)^2+0^2+(-0{,}4)^2} = \sqrt{100{,}16}$ (0,5) (1)

$|\overrightarrow{UK}| = \sqrt{(-1)^2+(-9)^2+(-0{,}4)^2} = \sqrt{82{,}16}$ (1)

Urs steht sogar näher als Toni am Kürbis (0,5)

Auch der Vergleich $|T'K'| > |U'K'|$ sollte volle Punktzahl ergeben.

3

e) Es geht um den Winkel α: $(\overrightarrow{KT}, \overrightarrow{KU})$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}10\\0\\0{,}4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\9\\0{,}4\end{pmatrix}}{\sqrt{100{,}16}\cdot\sqrt{82{,}16}} = \frac{10{,}16}{\sqrt{100{,}16}\cdot\sqrt{82{,}16}}$$ (1) (1)

$\alpha \approx 83{,}56940542°$

$\approx \underline{\underline{83{,}57°}}$ (1)

7,5

f) • Die geometrische Lösung ist sehr einfach:

U und T sind spiegelsymmetrisch zur Winkelhalbierenden $x=y$.

U muss also auf den Spiegelpunkt von K zielen: $\tilde{K}\ (3\ \ 2\ \ 1{,}1)$

Die Pfeile treffen sich dann in $(3\ \ 3\ \ 1{,}14) = Q$

• Rechnerisch wäre der Punkt Q auf der Geraden $\overline{TK}$ gesucht, der von T und U gleich weit entfernt ist (1,5)

$Q=\begin{pmatrix}12-10t\\3\\1{,}5-0{,}4t\end{pmatrix}$ (1) $|\overrightarrow{QT}| = \sqrt{100{,}16}\cdot t$ (1) $|\overrightarrow{QU}| = \left|\begin{matrix}12-10t-3\\3-12\\1{,}5-0{,}4t-1{,}5\end{matrix}\right|$ (1) $=\sqrt{(9-10t)^2+81+(0{,}4t)^2}$ (1)

$\rightarrow \cancel{100{,}16t^2} = 81-180t+\cancel{100t^2}+81+\cancel{0{,}16t^2}$ $\quad 180t=162 \quad t=0{,}9$ (1)

$Q = \underline{\underline{(3\ \ 3\ \ 1{,}14)}}$ (1)

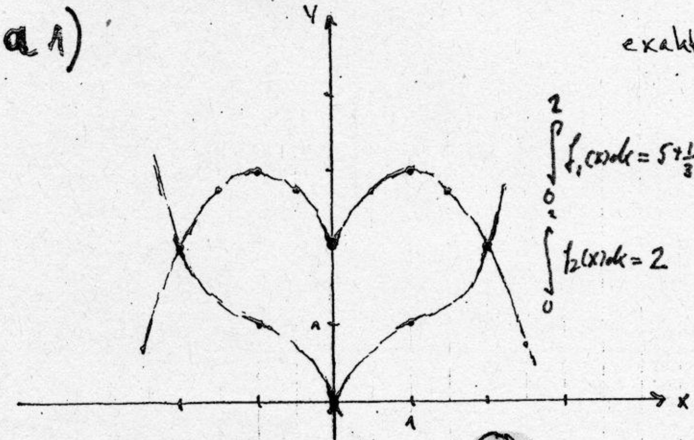
26,5

→

3)

Nr. 3 Lösung Integralrechnung

3a1)



$\int_0^2 f_1(x)dx = 5+\frac{1}{3}$

$\int_0^2 f_2(x)dx = 2$

exakte Punkte: 0|2 ±1|3 ±2|2

0|0 ±1|1 (±2|2)

f_1 1

f_2 1

max −1 wenn weniger als 6 weitere Punkte exakt sind.

Spiegelung 1

Schnittpunkte ±2|2 1 exakt

4

3a2) Grenzen 1

$$A = 2 \cdot \int_0^2 [f_1(x) - f_2(x)] \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 \left[-\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2\right] \cdot dx$$

hier Differenz bilden 1.5 oder hier

Stammfunktionen $F_1(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x \quad (+c)$

$F_2(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + x^2 \quad (+c)$ 2

$(F_1 - F_2)(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + 2x \quad (+c)$

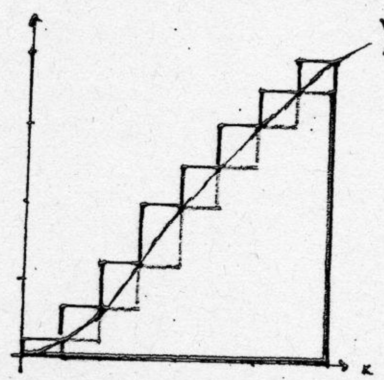
8

$$\frac{1}{2}A = \left[-\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + 2x\right]_0^2 = -\frac{16}{8} + \frac{8}{6} + 4 - 0 = 3\frac{1}{3}$$ (1.5) oder erst hier

$$\underline{\underline{A = 6\frac{2}{3}}}$$

Lösung Integralrechnung

3.b.1)



Untersumme: grün markierter Flächeninhalt

Obersumme: rot " "

Funktion 1

OS/US 2

Ober/Untersumme deutlich als Flächeninhalt.*

3

3b.2) sum[seq(Y₁(X)·0,02, X, 0, 3.98, 0.02)] → U = 7,80087676̅7

" [" (" " 0.02, 4 ")] → O = 7,88087676̅7

*Abzug insbesondere, wenn 2.2 nicht gelöst.

oder schrittweise: seq(X, X, 0, 3.98, 0.02) → L_1 1

$Y_1(L_1) \rightarrow L_1$ 1 : $0.02 L_1 \rightarrow L_1$ 1 : sum(L_1) 1

$A \approx (U + O) : 2 = \underline{\underline{7{,}840876767}}$

(mit fnInt 7,8408563)

oder auch $O = U + 0{,}02 \cdot 4$

$A \approx U + 0{,}02 \cdot 4/2$

6

5 für US und OS 1 für Durchschnitt.

Lösung Integralrechnung

5 3c.1) $V = \pi \int_0^4 [2\sqrt{x}]^2 \cdot dx = \pi \int_0^4 4x \cdot dx = \pi [2x^2]_0^4 = \underline{\underline{32\pi}} \approx 100{,}53$

(mit Fehler 3)

3c.2) Von dem Volumen aus 3.1 muss subtrahiert bzw addiert werden $-\pi \int_3^4 [2\sqrt{x-3}+2]^2\, dx + \pi \int_3^4 [-2\sqrt{x-3}+2]^2\, dx$ 3

$= \pi \int_3^4 [-(4(x-3) + 8\sqrt{x-3} + 4) + (4(x-3) - 8\sqrt{x-3} + 4)] \cdot dx$

$= \pi \int_3^4 -16\sqrt{x-3} \cdot dx = -16\pi \cdot [\frac{2}{3}(x-3)^{3/2}]_3^4 = -16\pi \cdot \frac{2}{3}$ *

5

$V = \underset{100{,}53}{32\pi} - \underset{33{,}51}{\frac{32}{3}\pi} = \frac{64}{3}\pi = 21\frac{1}{3} \cdot \pi$ *

* Mit Fehler $32\pi - 10{,}66666709\pi = \underline{\underline{21{,}33333291\pi}}$ 2

$\approx 67{,}02064328$

$\pi \int_0^4 f_1^2(x)\,dx = 100{,}53$

$\pi \int_3^4 f_2^2\,dx = 35{,}60$

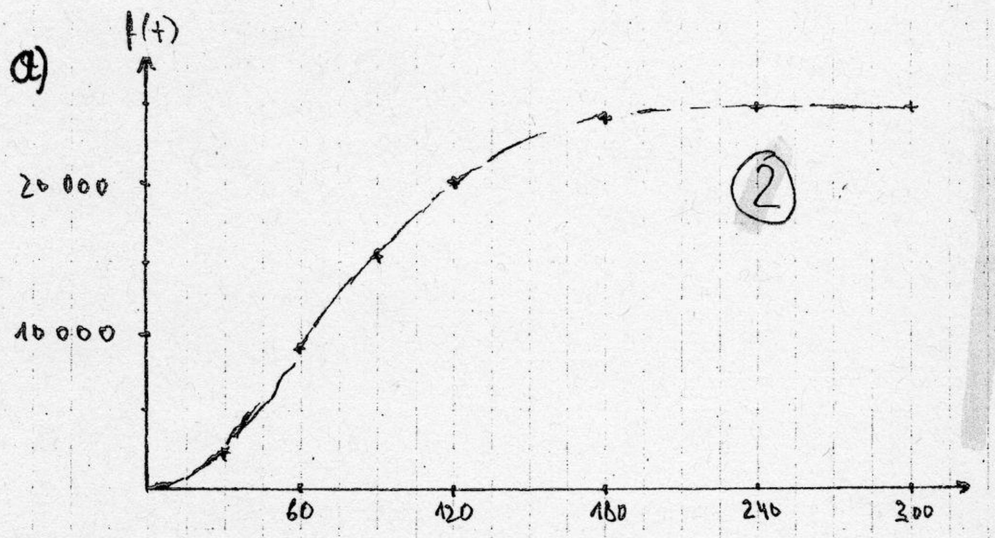
$\pi \int_3^4 f_3^2\,dx = 2{,}09$

$100{,}53 - 35{,}60 + 2{,}09 = 67{,}02$

4)

Lösung Nr. 4 Differential-Rechnung

a)



Saubere Zeichnung
mit Beschriftung
Sättigungswert 25 000
WP bei ~~t~~ $t=60$

2

b) $f(30) = 2390$ 1 $f(60) = 9164$

Zwischen 16:30 h und 17:00 h sind 6774 Eintreffende zu erwarten. 1

2

c) 23:00 entspricht $t = 420$ $f(420) = 24999$ 1

Nach 23 Uhr kommt nur noch 1 Gast 1 oder niemand!, da für $t \to \infty$

4 $f(t) \to 25000$ strebt [(* $f(480) = 25000$ 1 gerundet)]

d) $f(t) = 25000 - (16{,}2t^2 + 900t + 25000)\cdot e^{-0{,}036t}$ * > 0 1 also $f(t) < 250$

$f'(t) = 0 - \left[(32{,}4t + 900)\cdot e^{-0{,}036t} + (16{,}2t^2 + 900t + 25000)\cdot e^{-0{,}036t}\cdot(-0{,}036)\right]$ 0,5 1 1 0,5

$= -\left[\cancel{32{,}4t} + 900 - 0{,}5832t^2 - \cancel{32{,}4t} - 900\right]\cdot e^{-0{,}036t}$ 1

4 $= 0{,}5832\,t^2\cdot e^{-0{,}036t}$

e) Es ist das Maximum von f' gesucht. 1

$Y_2 = f'(t)$ Mit Calculate Maximum für Y_2 findet man

$t = 55{,}55556$ 1 $f'(t) = 243{,}6$

3 Um ca 16:56 0,5 ist mit ca 244 pro Minute 0,5 der stärkste Besucheransturm zu erwarten.

[Oder $f'' = 0$ mit Vorzeichenwechsel + −

$f''(t) = (2\cdot 0{,}5832 - 0{,}036\cdot 0{,}5832\,t)\cdot t\cdot e^{-0{,}036t}$

$t_1 = 0$ − + $t_2 = 55\,5/9$ + −]

3

f) Pro Minute können maximal $20 \cdot 6 = 120$ (1) Besucher eingelassen werden.

Rico ist der 2390te (1) Besucher (siehe b))

$2390 : 120$ (1) $= 19{,}91\overline{6}$ Minuten <u>Also ca 20 Minuten</u>

4,5

g) Sandra ist Nr. 15710. ($f(90)$) (1) Kontrolle ob $f'(t) \geq 120$ (1) während 16:30–17:30

Es wurden aber bereits $60 \cdot 120 = 7200$ (1) Besucher eingelassen

Sie steht also auf Nr. 8510 der Warteschlange. (0,5)

$8510 : 120 = 70{,}91\overline{6}$.. (1) <u>Sie wird ca 71 Minuten warten.</u>

4

h) Der Stau wächst, solange $f'(t) > 120$ ist. (1,5)

Mit Calculate Intersect für $Y_2 = f'$ und $Y_3 = 120$

findet man $t = 116{,}237$.. (1,5) Für größeres t ist $f' < 120$. (0,5)

Der Stau ist am größten um 17:56 Uhr. (0,5)

26,5 P.

Variante zu g) und h):

$f(t) - 120 \cdot (t-30)$ gibt für $t \geq 30$ die Anzahl der vor dem Einlass Wartenden an (wobei negative Werte als 0 gewertet werden.)

$f(t) : 120 - t + 30$ ist dann die Wartezeit für Ankunftszeit $t \geq 30$.

5)

Lösungen, WR, Version 2.0

a)[redacted]

a_1[redacted] $3 \cdot 11 = \underline{33}$

2 ① ① $\binom{11}{10} = \binom{11}{1} = 11$

---

2 a_2[redacted] $3 \cdot \binom{14}{10} = 3 \cdot 1001 = \underline{\underline{3003}}$ ① ①

Aufg. a) Punkte: 4

---

b)[redacted]

3 b_1[redacted] $P(5\,S,\text{ genau } 4T) = 5 \cdot \underbrace{0{,}8^4\, 0{,}2} = \underbrace{0{,}4096 = \underline{40{,}96\,\%}}$ ① ① ①

---

①

b_2[redacted] $P(5\,S,\text{ mind. } 3T) = \overbrace{\binom{5}{3} 0{,}8^3\, 0{,}2^2 + 0{,}4096 + 0{,}8^5}$ ① ①

$= 0{,}2048 + 0{,}4096 + 0{,}32768$

4 $= 0{,}94208$

$= \underline{94{,}2\,\%}$ ①

---

1 b_3[redacted] $15 \cdot 0{,}8 = \underline{12}$ ①

---

b_4[redacted] $P(n\,S,\text{ mind. ein Tor}) > 0{,}998$ ~~①~~ ~~0,5~~

$1 - P(n\,S,\text{ kein Tor}) > 0{,}998$

$P(n\,S,\text{ kein Tor}) < 0{,}002$ ①

3,5. $0{,}2^n < 0{,}002$ ①

1,[redacted] (oder TR, table) $n > \frac{\log(0{,}002)}{\log 0{,}2} \approx 3{,}86$ ①

[redacted] $\underline{\underline{n = 4}}$ ~~①~~ 0,5

Aufg. b) Punkte: 12 ~~13~~

11,5

5c) <u>Korrektur / Bewertungsschema Aufgabe 5c</u>

Gesamt: 9 Punkte

(Nach Helmuts Schema waren es 12, wovon aber 3 gestrichen wurden. Bei genauer Durchsicht waren es aber 13, wovon beim Zusammenzählen eins übersehen wurde.)

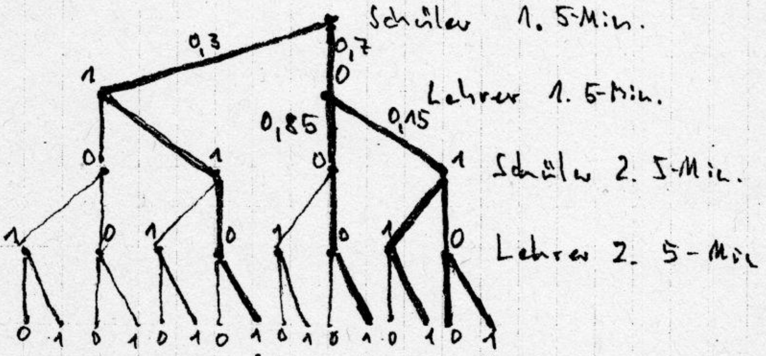
<u>Lösungsvarianten</u>

A 4stufiges Baumdiagramm

B 2stufiges Baumdiagramm nach Zeitabschnitten (Helmut)

C " " nach Mannschaften (Thomas)

A



Baum	1,5	2
mit p	0,5	
Pfade S	0,5	2
U	1,5	
Rechnung S	1,5	5
U	3,5	

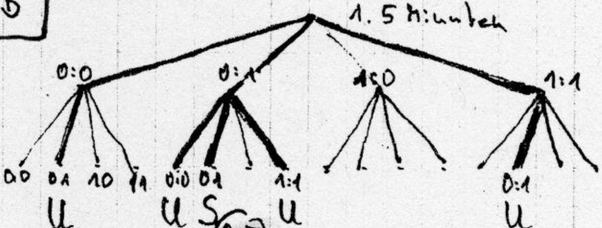
Lehrer-Sieg → $0{,}7 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}15 = 0{,}011025$ (1) $\approx \underline{\underline{1{,}10\,\%}}$ (0,5)

Unentschieden

$0{,}3 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}15 + 0{,}7 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}15 + 0{,}7 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}15 + 0{,}7 \cdot 0{,}15 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}85$

(Pfade einzeln: 2
Addition: 1 % 0,5) $= 0{,}1344 \approx \underline{\underline{13{,}44\,\%}}$

B



S:L

$p(0:0) = 0{,}7 \cdot 0{,}85 = 0{,}595$ (1)

$p(0:1) = 0{,}7 \cdot 0{,}15 = 0{,}105$ (1)

$p(1:0) = 0{,}3 \cdot 0{,}85 = 0{,}255$ (1)

$p(1:1) = 0{,}3 \cdot 0{,}15 = 0{,}045$ (0,5)

} 3,5

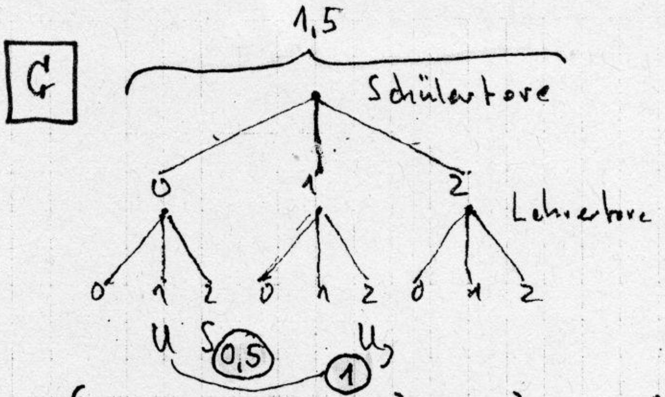
Lehrersieg $p(0:1)^2 = 0{,}105^2 = 0{,}011025 \approx \underline{\underline{1{,}1\,\%}}$ (1)

Unentschieden $2 \cdot p(0:0) \cdot p(0:1) + 2 \cdot p(0:1) \cdot p(1:1) \approx \underline{\underline{13{,}44\,\%}}$ (1)

(1,5)

} 3,5

$\boxed{G}$



4,5

	Schüler		Lehrer
0	$0{,}7^2$	1	$0{,}85^2$
2	$0{,}3^2$	1	$0{,}15^2$
1	$2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3$		$2\cdot 0{,}85\cdot 0{,}15$

1,5 1

3 Lehrersieg $0{,}7^2\cdot 0{,}15^2 = \underline{\underline{1{,}1\,\%}}$ 1

Unentschieden $0{,}7^2\cdot 2\cdot 0{,}85\cdot 0{,}15 + 2\cdot 0{,}7\cdot 0{,}3\cdot 0{,}15^2 = \underline{\underline{13{,}44\,\%}}$ 2

Hinweise:

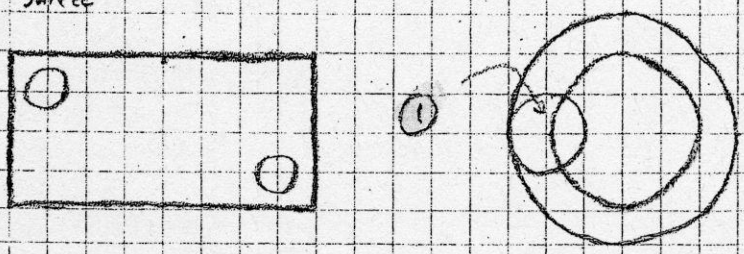
- Bäume, die nur (alle) notwendigen Pfade enthalten sind voll zu zählen.
- Auch ohne Baum sind (richtige) Rechenwege voll zu zählen.
- Korrekte Bäume geben die vorgesehene Punktzahl, auch wenn die Rechnung ganz falsch ist oder fehlt.
- Lehrersieg mit $0{,}7^2\cdot 0{,}15^2 = 1{,}1\,\%$ sollte 3 Punkte geben
  Unentschieden mit Rechenweg und % 6 Punkte.
- Vergessene Pfade beim Unentschieden sollten mindestens −2P geben, wenn der Baum fehlt oder unvollständig ist [illegible]
- Grob falsche Lösungen

  z.B. Lehrersieg $0{,}15\cdot 0{,}15$

  oder Unentschieden $\underset{(2:1)}{0{,}15\cdot 0{,}15}\cdot 0{,}3 + \underset{(1:0)}{0{,}15}$

sollten höchstens mit einem „Trostpunkt" (Anwendung Produktregel) bewertet werden.

5 d) Skizze



1

geom. WR / Laplace 1

1

$$P(T_{\ldots}) = \frac{\cancel{2}\cdot 20^2 \pi}{\cancel{200}\cdot \cancel{400}} = \frac{\pi}{100} = 0{,}0314159 \approx \underline{\underline{3{,}14\,\%}}$$ 1

Aufg. d. Punkte 4