Fach	Mathematik
Klassen	alle 5. Klassen
Dauer der Prüfung:	4 Stunden
Erlaubte Hilfsmittel:	Fundamentum Mathematik und Physik Taschenrechner TI-83 Plus inkl. Applikation CtlgHelp

Vorbemerkungen

- Die Lösungswege sind nachvollziehbar anzugeben. Ergebnisse ohne Begründung können mit 0 Punkten bewertet werden.
- Lösungen als Dezimalzahlen sind auf 2 Nachkommastellen zu runden. Lösungen von Textaufgaben sind sinnvoll zu runden.
- Jede Aufgabe muss auf einem separaten Blatt gelöst werden. Teilaufgaben sind deutlich zu nummerieren.
- Es können maximal 129,5 Punkte erreicht werden. Die Note 6 wird ab 100 Punkten erteilt.

Viel Erfolg wünschen Ihnen Thomas Ahrend, Michaela Heinis, Simone Jordan und Helmut Locher!

Aufgabe 1 Folgen **18 Punkte (2 + 2,5 + 3 + 4 + 6,5)**

Ein Mönch begibt sich auf eine Pilgerreise zu Fuss. Sein Ziel ist der bekannte Wallfahrtsort Santiago de Compostela in Spanien. Sein Weg dorthin ist **800 km** lang. Am ersten Tag schafft er **60 km**, am zweiten Tag **56 km**. Seine Tagesetappen bilden eine **geometrische Folge**, da seine Kräfte von Tag zu Tag nachlassen.

a) Geben Sie eine Definition dieser geometrischen Folge mit $\boldsymbol{a_1 = 60}$ und $\boldsymbol{a_2 = 56}$ (explizit oder rekursiv).

b) Am wievielten Tag schafft der Mönch erstmals **weniger als 20 km**?

c) Am wievielten Tag erreicht er Santiago de Compostela?

d) In der Nacht nach seiner Ankunft in Santiago erscheint der Heilige Jacob dem Mönch im Traum. Er sagt: "Armer Mönch. Nun bist Du so weit gepilgert, aber nach Hause kommst Du nimmermehr. Wenn es mit Deinen Tagesetappen in genau gleicher Weise weitergeht wie auf Deiner Hinreise, dann wirst Du auf Deinem Rückweg nicht weiter als ... km weit kommen. Und selbst dieses Ziel würdest Du erst in der Ewigkeit erreichen." Erläutern Sie die Aussage von Sankt Jacob und berechnen Sie die Zahl, die er im Traum genannt hat.

e) Am nächsten Morgen betet der Mönch: "Lieber St. Jacob. Schenke mir für meine Rückreise eine arithmetische Folge für meine Tagesetappen." Tatsächlich stellt der Mönch erfreut fest, dass er auf seiner Rückreise **von Tag zu Tag immer einen Kilometer mehr** schafft. Genau **am Ende des 32. Tages** erreicht er seinen Heimatort. Geben Sie eine Definition der arithmetischen Folge, die Sankt Jacob dem Mönch geschenkt hat (explizit oder rekursiv).

Aufgabe 2 Vektorgeometrie **25,5 Punkte (2+6,5+3,5+3+3+7,5)**

Die Klasse von Urs und Tony führt als Klassentheater "Wilhelm Tell" auf. Nach der Hauptprobe wollen die beiden ein Wettschiessen veranstalten. Dazu nimmt sich jeder der beiden eine Armbrust aus dem Requisitenschrank und sie gehen damit auf die Wiese hinter dem Schulhaus. Dort stecken Sie einen Kürbis auf einen Holzpflock und stellen sich dann in etwa gleichem Abstand zum Kürbis auf. Wir nehmen zur Vereinfachung an, dass die Pfeile auf Geraden fliegen. Nach dem ersten Schuss müssen beide lachen. Denn sowohl Urs wie auch Tony haben daneben geschossen. Jetzt steckt der Pfeil von Urs in einem **Baum**, der von Tony in einer **Holzwand** hinter der Wiese.

Für die folgenden Aufgaben benutzen Sie bitte folgende Angaben:
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.
Die **Kürbismitte** (Ziel) befindet sich im Punkt **K(2/3/1,1)**.
Die **Pfeilspitze von Urs** befindet sich vor dem Abschuss im Punkt **U(3/12/1,5)**.
Die von **Tony** im Punkt **T(12/3/1,5)**.
Die **Holzwand** entspricht der **y-z-Ebene**.

a) Zeichnen Sie K, T und U in das beigelegte Koordinatensystem ein. Beachten Sie dabei die Skalierung der z-Achse.

b) Tony schiesst bei einem Versuch direkt durch die Kürbismitte hindurch und der Pfeil bleibt in der Holzwand stecken. Zeichnen Sie die **Schussgerade g** und konstruieren Sie den **Punkt W in der Wand**, in dem der Pfeil stecken bleibt. Berechnen Sie nun die Koordinaten exakt.

c) Urs' Pfeil streift den Kürbis oberhalb seiner Mitte im Punkt (2/3/1,2) und bleibt im Baum in genau 1 m Höhe stecken (**Punkt B**). Bestimmen Sie die Koordinaten von B wahlweise <u>entweder</u> durch Konstruktion und Ablesen <u>oder</u> durch Rechnung exakt.

d) Tony jubelt, Urs brummt: "Du stehst ja auch viel näher dran!" Beweisen oder widerlegen Sie Urs Behauptung.

e) Urs und Tony schiessen noch einmal und landen beide einen Volltreffer genau in die **Mitte des Kürbis (Punkt K)**. In welchem Winkel zueinander ragen die beiden Pfeile aus dem Kürbis heraus?

f) Urs sucht eine neue Herausforderung. Er beschliesst, nicht den Kürbis, sondern Tonys Pfeil wegzuschiessen, bevor dieser den Kürbis trifft. Auf welchen Punkt Q im Raum muss er zielen, damit er trifft, wenn beide ihre Pfeile gleichzeitig und mit gleicher Geschwindigkeit abschiessen? Sie können diese Aufgabe rechnerisch oder geometrisch lösen.

Aufgabe 3 Integralrechnung **31 Punkte (4 + 8 + 3 + 6 +5 + 5)**

a) Zeichnet man in ein Koordinatensystem die beiden Schaubilder von

$$f_1(x) = -x^2 + 2x + 2 = -(x-1)^2 + 3, \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

und

$$f_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x = \frac{1}{2}\Big((x-1)^3 + x\Big) + \frac{1}{2}, \quad \text{für} \quad x \geq 0$$

und spiegelt diese noch an der y-Achse, so erkennt man zwischen den Schaubildern und ihren Spiegelbildern eine Fläche von der Form eines Herzens.

a.1) Fertigen Sie hiervon eine saubere Zeichnung. **Längeneinheit: 1 cm**. Alle Punkte mit ganzzahliger x-Koordinate exakt eingetragen, dazwischen skizziert.

a.2) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Herzens exakt mittels der Stammfunktionen. (Die Berechnung mit TR ohne Stammfunktion gibt nur die halbe Punktzahl.)

b) In dieser Aufgabe sollen Sie das Integral

$$\int_0^4 x^2 \cdot 2^{-0,5x}\,\mathrm{dx}$$

näherungsweise durch Unter- und Obersumme berechnen. Die Integralbefehle des TI-83 dürfen nicht verwendet werden.

b.1) Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion zwischen **x = 0 und 4**. Stellen Sie in dieser Zeichnung eindeutig dar, was die Untersumme und was die Obersumme ist. Wählen Sie eine Einteilung in **8 Streifen**. (Hier ist keine Berechnung verlangt.)

b.2) Berechnen Sie den Wert des Integrals näherungsweise mit Hilfe von Unter- und Obersumme für eine Einteilung in **200 gleich breite Streifen**. Geben Sie die TR-Befehle vollständig an.

c) Hier geht es um Rotationskörper, zunächst einen einfachen c.1), dann einen zusammengesetzten c.2).

c.1)

$$f_1(x) = 2\sqrt{x}, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq 4.$$

Die Fläche zwischen dem Schaubild von f_1, der x-Achse und der Grenze x = 4 rotiere um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers exakt mittels Stammfunktion. (Berechnung ohne Stammfunktion gibt nur 3 Punkte.)

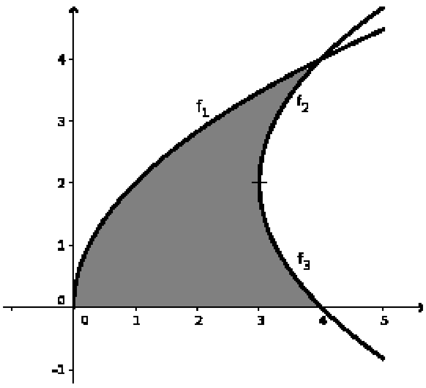
c.2) Zusätzlich zu f_1 sind nun noch

$$\boldsymbol{f_2(x) = +2\sqrt{x-3} + 2,} \text{ für } \boldsymbol{3 \leq x \leq 4}$$

und

$$\boldsymbol{f_3(x) = -2\sqrt{x-3} + 2,} \text{ für } \boldsymbol{3 \leq x \leq 4.}$$

gegeben (Siehe Skizze). Die graue Fläche rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen dieses Rotationskörpers, wobei Sie jetzt **alle TR-Funktionen** verwenden dürfen.



Aufgabe 4 Differentialrechnung

26,5 Punkte (2+2+4+4+3+3+4,5+4)

Für die Planung und Vorbereitung eines grossen Openairs benötigen die Veranstalter eine Prognose darüber, wie viele Besucher zu erwarten sind und wie sich deren Ankunft zeitlich über den Abend verteilt. In unserer Aufgabe ist diese Prognose durch folgende Prognosefunktion gegeben

$$\boldsymbol{f(t) = 25000 - (16.2\,t^2 + 900\,t + 25000) \cdot e^{-0.036t}, \quad t \geq 0}$$

Dabei bedeutet t die Zeit in Minuten ab **16:00 Uhr**. $f(t)$ bedeutet die Anzahl der Besucher, die voraussichtlich bis zum Zeitpunkt t vor Ort eingetroffen sein werden.

a) Zeichnen Sie $f(t)$, für $0 \leq t \leq 300$. (1 cm entspricht 30 Minuten)

b) Berechnen Sie $f(30)$ und $f(60)$. Beschreiben Sie in Worten, was der Wert $f(60) - f(30)$ aussagt.

c) Wie viele Besucher kommen erst nach **23 Uhr**?

d) Berechnen Sie von Hand die Ableitung $f'(t)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\boldsymbol{f'(t) = 0.5832\,t^2\,e^{-0.036t}}$$

e) Zu welcher Uhrzeit kommen am meisten Personen vor den Kassen an? Wie viele?

Es gibt **20 Kassen**. Wegen eines Problems, können diese erst um **16.30 Uhr** geöffnet werden. Für den Kassiervorgang pro Person vergehen im Schnitt **10 Sekunden**.

f) Wie lange muss Rico warten, wenn er um **16.30 Uhr** vor Ort eintrifft?

g) Wie lange muss dann Sandra warten, wenn Sie um **17.30 Uhr** ankommt?

h) Zu welchem Zeitpunkt ist der Stau vor den Kassen am grössten?

Aufgabe 5 Wahrscheinlichkeitsrechnung
28,5 Punkte (2+2+3+4+1+3,5+9+4) Beim traditionenellen SchülerInnen-LehrerInnen-Fussballspiel am Sportstag des Gymnasiums Bäumlihof stellten sich allerlei mathematische Probleme, die unabhängig voneinander lösbar sind.

a) Eine Mannschaft besteht aus einem Torwart und 10 Feldspielern.

a.1) Für die LehrerInnen-Mannschaft finden sich **14 Freiwillige**, wovon **3 Mathematiklehrer** sind. Wie viele Mannschaftsaufstellungen sind möglich, wenn man zur Bedingung macht, dass der Torwart ein Mathematiklehrer sein muss und kein Feldspieler ein Mathematiklehrer sein darf?

a.2) Der Schulleitung sind 14 Freiwillige zu wenig und sie "überredet" **3** weitere **Englischlehrer** zur Teilnahme. Wie viele Mannschaftsaufstellungen sind möglich, wenn man (wieder) zur Bedingung macht, dass der Torwart ein Mathematiklehrer sein muss und kein Feldspieler ein Mathematiklehrer sein darf?

b) Die Erfahrung zeigt, dass die Wahl eines Mathematiklehrers als Torwart nicht die beste ist. **80%** der Schüsse auf das Tor sind auch **Treffer**!

b.1) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei 5 Schüssen auf das Tor, genau 4 Treffer zu erzielen? (Angabe in %)

b.2) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei 5 Schüssen auf das Tor, mindestens 3 Treffer zu erzielen? (Angabe in %)

b.3) Wie viele Treffer sind bei 15 Schüssen zu erwarten?

b.4) Nach 20 Minuten steht es immer noch 0:0. "So viele Schüsse direkt auf's Tor und noch kein Treffer!" schimpft ein Schüler-Stürmer. Darauf ein Mathe-Lehrer: "Stimmt. Die Wahrscheinlichkeit, dass das 1:0 hätte fallen müssen, liegt über 99,8%." Wie viele Schüsse direkt auf's Tor der Lehrermannschaft gab es (mindestens) ?

c) **Zehn Minuten** vor Ende der Spielzeit steht es **3:2** für die SchülerInnenmannschaft. Im Jubel hierüber wird im Fanblock der SchülerInnen ein bengalisches Feuer gezündet und das Spiel muss abgebrochen werden. Wie hätte dieses Spiel regulär ausgehen können: Berechnen Sie die beiden Wahrscheinlichkeiten, für ein Unentschieden und für ein Sieg der Lehrpersonen unter folgenden (stark vereinfachten) Annahmen: in den nächsten 5 Minuten hätten sowohl SchülerInnen als auch LehrerInnen maximal ein Tor geschossen. Die SchülerInnen hätten mit einer Wahrscheinlichkeit von **30%** getroffen und die LehrerInnen mit einer Wahrscheinlichkeit von **15%**. Das gleiche gilt für die letzten 5 Minuten. All diese Ereignisse sind stochastisch unabhängig voneinander. (Angabe in %)

d) Beim Torwandschiessen geht es darum, den Ball in eines der zwei Löcher einer Holzwand zu schiessen. Die Wand ist 2 m hoch und 4 m breit, die Löcher haben einen Durchmesser von 60 cm und der Ball hat einen Durchmesser von 20 cm. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, ein Tor zu schiessen, wenn man davon ausgeht, dass die Wand sicherlich getroffen wird, keine Streifschüsse zu einem Tor führen und der Treffpunkt ansonsten rein zufällig ist? (Angabe in %)

Anhang: Beiblatt zur Aufgabe 2