GB GF MATHEMATIK LÖSUNGEN Maturitätsprüfung 2017

1. Raumgeometrie

4P a) Zu zeigen ist: $g \cap h = S(0/6/9)$

① $\begin{pmatrix}-5\\2\\9\end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix}-6\\8\\-18\end{pmatrix}$ 0.5 $\Rightarrow$ g und h sind schneidend oder windschief

② 1

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 5-5r = -3-6s \quad |\cdot 2 \\ \text{II.} & 4+2r = 10+8s \quad |\cdot 5 \\ \text{III.} & 9r = -18s \end{array}$$

$30 = 44 + 28s$; $2r = 6+8s$

$-14 = 28s$; $2r = 6-4$

$\underline{s = -\frac{1}{2}}$ 0.5 $\underline{r = 1}$ 0.5

Kontrolle in III: $9 = (-18)(-\frac{1}{2})$ wahr

$\Rightarrow \underline{\underline{S(0/6/9)}}$ 0.5

Zu zeigen ist: $S(0/6/9) \in i$

$$\left.\begin{array}{lll} 0 = 3 + t & \Rightarrow t = -3 & \\ 6 = 36 + 10t & \Rightarrow 10t = -30 & \Rightarrow t = -3 \\ 9 = 36 + 9t & \Rightarrow 9t = -27 & \Rightarrow t = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{S \in i}}$$ 1

1P b) $y = 0: \Rightarrow 36 + 10t = 0$

$\underline{\underline{t = -3{,}6}}$ 0.5 $\Rightarrow \underline{\underline{I(-0{,}6/0/3{,}6)}}$ 0.5

2P f) ① $\overline{AB} = 10$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-6\\8\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{36+64} = 10$

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}2\\-14\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \overline{BC} = \sqrt{4+196} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

} ΔABC ist gleichschenklig mit Basis $\overline{BC}$. 1

② I. $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 200 = \overline{BC}^2 \Rightarrow \Delta ABC$ ist rechtwinklig bei Ecke A. 1

oder II. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-6\\-8\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-8\\6\\0\end{pmatrix} = 48 - 48 = 0$

1P g) $\underline{\underline{V}} = \frac{G \cdot h}{3} = \frac{50 \cdot 9}{3} = \underline{\underline{150}}$ 0.5

$h = 9$

$G = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{2} = 50$ 0.5

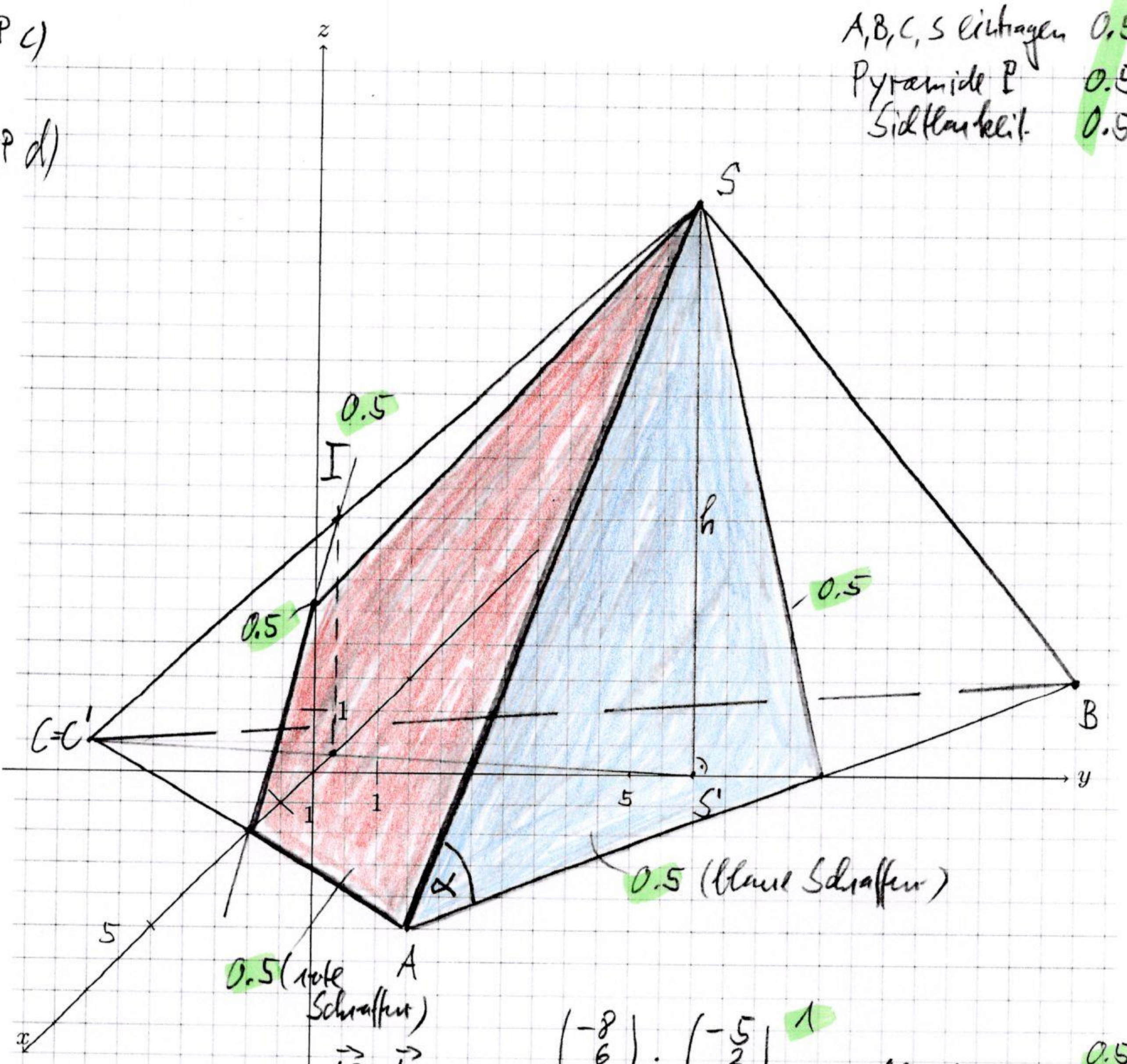
+

$\underline{\underline{14P}}$

1.5P c)

2.5P d)

A,B,C,S Eintragen 0.5
Pyramide P 0.5
Sichtbarkeit 0.5



2P e) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{AS}}{\overline{AB}\cdot\overline{AS}} = \dfrac{\begin{pmatrix}-8\\6\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5\\2\\9\end{pmatrix}}{\sqrt{64+36}\cdot\sqrt{25+4+81}} = \dfrac{40+12}{10\sqrt{110}} \simeq 0.50$ 1 0.5

$\Longrightarrow \alpha \simeq 60.28^\circ$ 0.5

Abbildung 1: **Koordinatensystem zur Aufgabe 1**

2. Differentialrechnung

1P a) $\underline{\underline{f'(x) = 4x - 4}}$ 0.5 , $\underline{\underline{f''(x) = 4}}$ 0.5

1P b) $f(x) = 0: \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0$

CALC: zero $\quad (x-5)(x+3) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 5}}$ 0.5 , $\underline{\underline{x_2 = -3}}$ 0.5

2P c) $\tilde{f}(x) = 2x$

$$\frac{\Delta \tilde{f}(x)}{\Delta x} = \frac{\tilde{f}(x+\Delta x) - \tilde{f}(x)}{\Delta x} = \frac{2(x+\Delta x)^2 - 2x^2}{\Delta x}$$ 0.5

$$= \frac{2x^2 + 4x\cdot\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2x^2}{\Delta x}$$ 1 $$= \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\tilde{f}'(x)}} = \lim_{\Delta x \to 0} (4x + 2\Delta x) = \underline{\underline{4x}}$$ 0.5

Geg: $g(x) = \sin(3x)$

1P d) $\underline{\underline{g'(x) = 3\cdot\cos(3x)}}$ 0.5 , $\underline{\underline{g''(x) = -9\cdot\sin(3x)}}$ 0.5

2P e) $q(x) = \dfrac{2x^2 - 4x - 30}{\sin(3x)}$ 0.5 $\quad q(1) = \dfrac{2-4-30}{\sin(3)} \simeq -\dfrac{32}{0{,}14} \simeq -226.80$ 0.5

MODE: Radian

$\lim_{x\downarrow 1} q(x)$ und $\lim_{x \uparrow 1} q(x)$ existieren und sind gleich und $\lim_{x\to 1} q(x) = q(1)$ 1

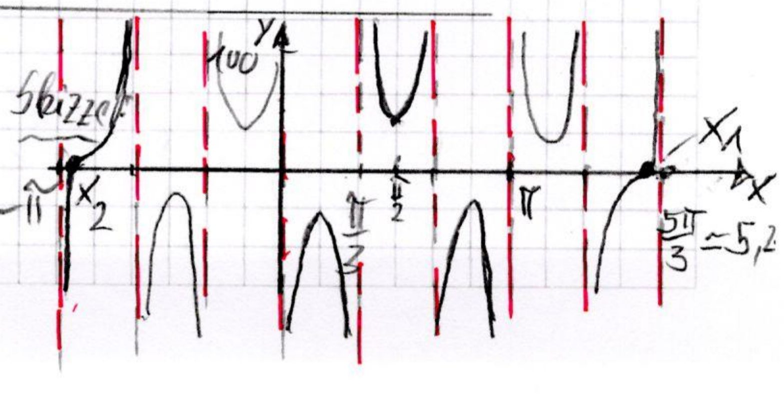
$\frac{dq(1)}{dx} \simeq -4774$

1.5P f) Definitionslücken für $g(x) = \sin(3x) = 0$ $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow 3x = 0$

$\Rightarrow x = k\cdot\frac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbb{Z})$ Es gibt drei Definitionslücken bei $\underline{\underline{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi}}$ in $(0, \pi]$. 1

1.5P g) $$q'(x) = \frac{(4x-4)\cdot\sin(3x) - (2x^2 - 4x - 30)\cdot 3\cos(3x)}{\sin^2(3x)}$$

(vereinfachen ist nicht verlangt, bringt nichts)



+
$\underline{\underline{10P}}$

3. Integralrechnung

1P a) Ansatz: p: $y = ax^2 + 2.5$ und $(1.75|0) \in p$ (c = 2.5 aus der Figur)

$\Rightarrow 0 = 1.75^2 a + 2.5$ 0.5

$\underline{a} = -\frac{2.5}{1.75^2} = -\frac{5 \cdot 16}{2 \cdot 49} = \underline{\underline{-\frac{40}{49}}}$ 0.5 MATH/MATH: ▶Fra

3P b) $\underline{\underline{A_1}} = 2 \cdot \int_0^{0.5} \left(-\frac{40}{49}x^2 + \frac{5}{2} - \frac{21}{10}\right) dx$ 1 $= 2 \cdot \int_0^{0.5} \left(-\frac{40}{49}x^2 + \frac{2}{5}\right) dx$

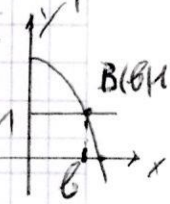
$= 2\left[-\frac{40}{147}x^3 + \frac{2}{5}x\right]_0^{\frac{1}{2}}$ 1 $= 2 \cdot \left(-\frac{40}{147 \cdot 8} + \frac{2}{5 \cdot 2}\right)$

$= \frac{-50 + 294}{735} = \underline{\frac{244}{735}} \simeq \underline{\underline{0.33}}$ 1

2.5P c) $\underline{\underline{A_2}} = \int_{0.5}^{b} \left(-\frac{40}{49}x^2 + \frac{5}{2} - 1\right) dx$ 1 $B(b|1) \in p$; $g: y = 1 \cap p$

$= \int_{0.5}^{B} \left(-\frac{40}{49}x^2 + \frac{3}{2}\right) dx \simeq \underline{\underline{0.64}} \rightarrow C$ 0.5 $\Rightarrow 1 = -\frac{40}{49}x^2 + \frac{5}{2}$

CALC 7: $\int f(x)dx$ $\frac{40}{49}x^2 = \frac{3}{2}$



$x^2 = \frac{147}{80}$ $(x_{1/2} \simeq \pm 1.36)$

$\Rightarrow \underline{b \simeq 1.36} \rightarrow B$ 1

2P d) $\underline{\underline{A_3}} = \int_{0.5}^{1.75} \left(-\frac{40}{49}x^2 + \frac{5}{2}\right) dx - A_2$ 1 $= \left[-\frac{40}{147}x^3 + \frac{5}{2}x\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{7}{4}} - A_2$

$\simeq \underline{\underline{1.06}}$ 1 $\rightarrow D$

CALC 7: $\int f(x)dx$

$= -\frac{40 \cdot 343}{147 \cdot 64} + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 4} - \left(-\frac{40}{147 \cdot 8} + \frac{5}{4}\right.$

$= -\frac{35}{24} + \frac{35}{8} + \frac{5}{147} - \frac{5}{4} - A_2$

$= \underline{\frac{250}{147}} - A_2$

(Eine Berechnung mit Stammfunktion ist nur bei b) verlangt!)

1.5P e) $A_{\text{Tülle}} = 2.1$ 0.5 , $A_{\text{Total}} = A_1 + A_4 + 2(A_2 + A_3)$

$= 5.8\overline{3} = \frac{35}{6} \in \mathbb{Q}$ 1

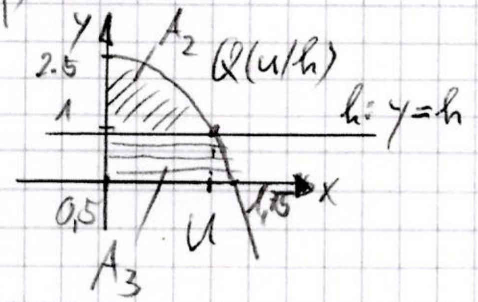
MATH/MATHS Frac

Kontrolle / Alternative:

$$A_{\text{Total}} = 2 \cdot \int_0^{1.75} \left(-\frac{40}{49}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx = 2\left[-\frac{40}{147}x^3 + \frac{5}{2}x\right]_0^{\frac{7}{4}}$$

$$= 2\left(-\frac{35}{24} + \frac{35}{8}\right) = \frac{-70+210}{24} = \frac{140}{24} = \underline{\underline{\frac{35}{6}}} \in \mathbb{Q}$$

5P f) Skizze



Gesucht ist $h: y = h$ so, dass $A_2 = A_3$

Also $h = -\frac{40}{49}u^2 + \frac{5}{2}$ 0.5

$$A_2 + A_3 = \int_{0.5}^{1.75} f(x)\,dx = \frac{250}{147} \simeq 1.70$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{125}{147} \simeq 0.85$$ 0.5

(I.) $A_2(u) = \int_{0.5}^{u} \left(-\frac{40}{49}x^2 + \frac{5}{2}x - h\right)dx$ 0.5 $= \int_{0.5}^{u} \left(-\frac{40}{49}x^2 \cancel{+ \frac{5}{2}} + \frac{40}{49}u^2 \cancel{- \frac{5}{2}}\right)dx$ 0.5

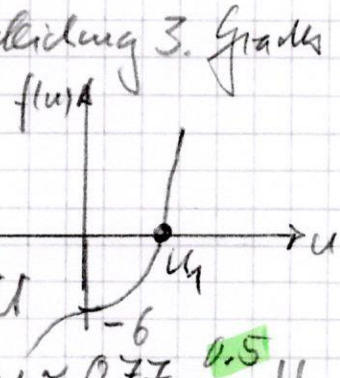
$$= \left[-\frac{40}{147}x^3 + \frac{40u^2}{49} \cdot x\right]_{\frac{1}{2}}^{u}$$ 0.5 $$= -\frac{40}{147}u^3 + \frac{40}{49}u^3 + \frac{5}{147} - \frac{20}{49}u^2$$

$$= \frac{80}{147}u^3 - \frac{20}{49}u^2 + \frac{5}{147}$$ 0.5

$$\Rightarrow \frac{80}{147}u^3 - \frac{20}{49}u^2 + \frac{5}{147} = \frac{125}{147}$$ Gleichung 3. Grades

$$80u^3 - 60u^2 - 120 = 0$$

$$4u^3 - 3u^2 - 6 = 0$$ 1



0.5

CALC: zero $u_1 \simeq 1.457 \to U$

$\Rightarrow h \simeq 0.7675$ d.h. $\underline{h: y \simeq 0.77}$ 0.5 $\to H$

(Kontrolle: $\int_{0.5}^{U} (f(x) - H)\,dx = \frac{125}{147}$)

(II.) SOLVER
eqn: $0 = \text{fnInt}(-\frac{40}{49}X^2 + \frac{40}{49}U^2, X, 0.5, U) - \ldots$
X=1
U=1 $\Rightarrow \underline{U \simeq 1.457}$ 2.5

+
15P

4. Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik

5P a) $\underline{\underline{P(A)}} = 0{,}9^4 \cdot 0{,}38^2 \approx \underline{\underline{9.47\,\%}}$ 1

$\underline{\underline{P(B)}} = 0{,}1 \cdot 0{,}38 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}62 \approx \underline{\underline{1.72\,\%}}$ 1

$\underline{\underline{P(C)}} = 2 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}38 \cdot 0{,}62 \approx \underline{\underline{30.92\,\%}}$ 1 $\rightarrow$ C

$\underline{\underline{P(D)}} = P(1K, 0A) + P(2K, 0A) + P(2K, 1A)$ 0.5

$= 2 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}38 \cdot 0{,}62 + 0{,}9^4 \cdot 0{,}62^2 + 4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 \cdot 0{,}62^2$

$\approx 30.92\,\% + 25.22\,\% + 11.21\,\% \approx \underline{\underline{67.35\,\%}}$ 0.5

0.5 0.5

0.5P b) $8! = \underline{\underline{40'320}}$ 4 Vokale, 4 Konsonanten

3P c) i. $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = \underline{\underline{1680}}$ 1

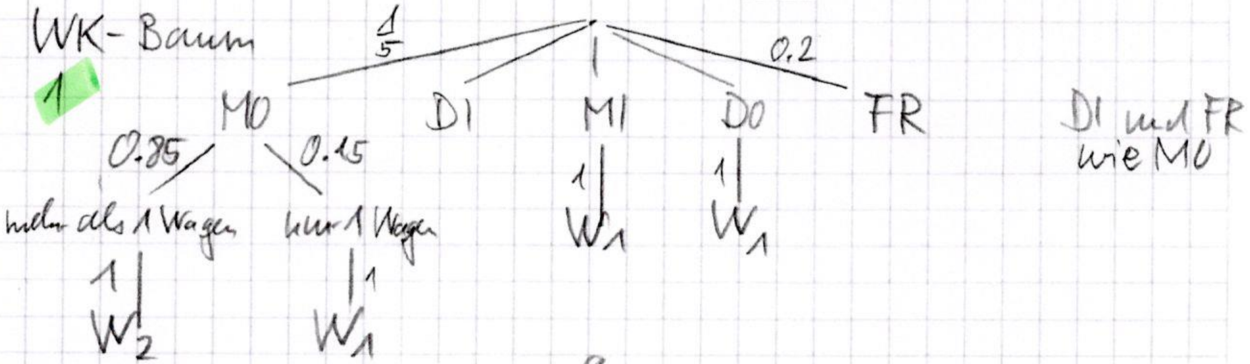
ii. $4! = \underline{\underline{24}}$ 0.5

iii. I. $\binom{4}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 = 6 \cdot 12^2 = \underline{\underline{864}}$ 1 II. $\binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4! = 6^2 \cdot 24 = \underline{\underline{864}}$

0.5

1P d) $P(\text{LENA}) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{1680}}} \approx \underline{\underline{0.06\,\%}}$ 1

2.5P e) WK-Baum 1



$\underline{\underline{P(E)}} = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15 = \underline{\underline{\frac{9}{100}}} = \underline{\underline{9\,\%}}$ 0.5

$\underline{\underline{P(F)}} = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}09 + 0{,}4 = \underline{\underline{49\,\%}}$ 1

1.5P f) Bedingte WK

$$P(C.\text{ alleine} / C.\text{ in } W_1) = \frac{P(C.\text{ alleine} \cap W_1)}{P(C.\text{ in } W_1)} = \frac{0{,}4}{0{,}49} = \frac{40}{49} \approx 81{,}63 \quad 1$$

$\nearrow P(F)$

$$P(C.\text{ allein und in } W_1) = 2 \cdot 0{,}2 = \underline{0{,}4} \quad 0.5$$

1.5P g) $X \triangleq$ Anzahl Schwarzfahrer (Zufallsgrösse)

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0{,}98^{105} \simeq \underline{\underline{88{,}01\,\%}} \quad 1$$

Erwartungswert $E = 105 \cdot 0{,}02 = 2{,}1$ 0.5

d.h. die Kontrolleure müssen mit 2 Schwarzfahrern rechn

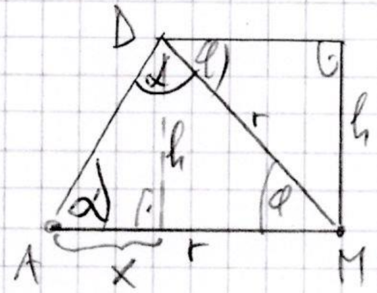
+

15P

5. Extremalaufgabe

3.5P a) $\sin\varphi = \frac{h}{r} \Rightarrow \underline{\underline{h}} = r\cdot\sin\varphi = 5\cdot\sin 30^\circ = \underline{\underline{2.5\,cm}}$ 0.5 0.5

$\cos\varphi = \frac{\frac{\overline{CD}}{2}}{r} = \frac{\overline{CD}}{2r} \Rightarrow \underline{\underline{\overline{CD}}} = 2r\cdot\cos\varphi = 10\frac{\sqrt{3}}{2} \approx \underline{\underline{8.66\,cm}} \to C$ 0.5 0.5



(I.) ΔAMD ist gleichschenklig

$\Longrightarrow 2\alpha = 180^\circ - \varphi = 150^\circ$

$\underline{\alpha = 75^\circ}$ 0.5

$\sin\alpha = \frac{h}{\overline{AD}}$ 0.5 $\Rightarrow \underline{\underline{\overline{AD}}} = \frac{h}{\sin\alpha} \approx \underline{\underline{2.59\,cm}} \to D$ 0.5

(II.) $2x + \overline{CD} = 10 \Rightarrow \underline{x} = 5 - \frac{\overline{CD}}{2} \approx \underline{0{,}67\,cm}$ 0.5

$\underline{\underline{\overline{AD}}} = \sqrt{h^2 + x^2}$ 0.5 $\approx \underline{\underline{2.59\,cm}}$ 0.5

1.5P b) $\underline{\underline{U}} = 2r + \overline{CD} + \overline{AD} \approx \underline{\underline{23.84\,cm}}$ 0.5

$F = \frac{(\overline{AB} + \overline{CD})\cdot h}{2}$ 0.5 $\approx \underline{\underline{23.33\,cm^2}}$ 0.5 $\left(F = \frac{a+c}{2}\cdot h \quad a = 2r = \overline{AB} = 10 \quad c = \overline{CD} \right)$

7P c) (I) Vollständig algebraische Lösung:

$F(a,c,h) = \left(\frac{a}{2} + \frac{c}{2}\right)\cdot h$ Nebenbedingungen: (siehe a))

$F(\varphi) = (5 + 5\cdot\cos\varphi)\cdot 5\sin\varphi \to 1$ 1 — 1. $h = 5\cdot\sin\varphi$; 2. $\frac{c}{2} = 5\cdot\cos\varphi$ } (schon Punkte bei a))

$F(\varphi) = 25(\sin\varphi + \sin\varphi\cdot\cos\varphi)$ $\boxed{0^\circ \le \varphi \le 90^\circ}$

$\Rightarrow F'(\varphi) = 25(\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$ 1 — $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$

$= 25(\cos\varphi + \cos^2\varphi - 1 + \cos^2\varphi)$ 0.5 — $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$

$F(\varphi) = 25(2\cdot\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1)$; $F''(\varphi) = 25(-4\sin\varphi\cdot\cos\varphi - \sin\varphi)$ 1

5) c) $F'(\varphi) = 0: \Rightarrow 25(2v^2 + v - 1) = 0$ **1** Substitution $\boxed{v = \cos\varphi}$

$2v^2 + v - 1 = 0$ $v_1 = \frac{1}{2} = \cos\varphi$ 0.5 $\Rightarrow \varphi_1 = 60°$ **0.5**

$v_2 = -1 = \cos\varphi \Rightarrow \varphi_2 = 180° > 90°$

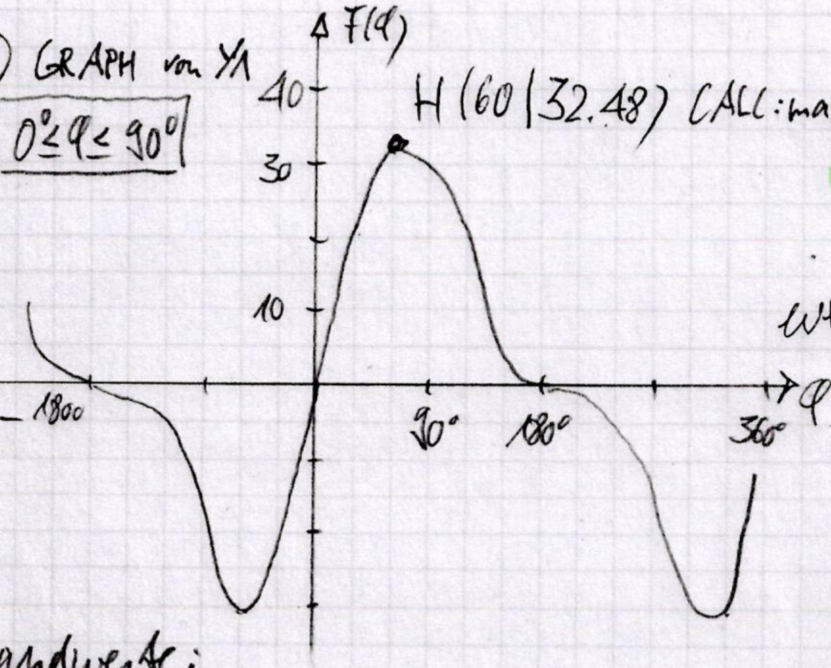
Testen mit $F''(60°) = 25\left(-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$ **0.5**

$\Rightarrow$ maximaler Trapezinhalt für $\underline{\underline{\varphi = 60°}}$. **0.5**

$\underline{F_{max} \approx 32.48 cm^2}$ 0.5

+
12P

II. GRAPH von Y1 $\boxed{0° \leq \varphi \leq 90°}$



Punkteverteilung: ≤ 3.5

F(φ) 1

Wtf. Skizze 1

H 0.5

Interpretation: $\underline{\underline{\varphi = 60°}}$ ergibt max. Trapez $\underline{F_{max} \approx 32.48 cm^2}$ 0.5

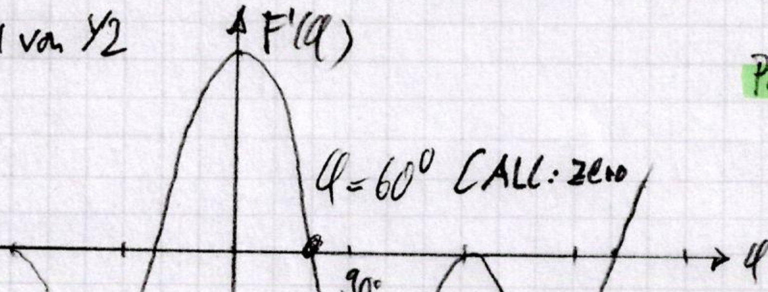
Randwerte:

$F(0°) = 0$, $F(90°) = 25$

Begründung des Maximums mit Extremwertsatz für $F(\varphi)$ stetig in $(0°, 90°)$. 0.5

III. Nullstellen von $F'(\varphi) = 25(\cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \rightarrow Y2$

GRAPH von Y2



Punkte total: ≤ 4.5P

IV. Elementargeometrisch: Ausgangsfigur verdoppeln. Dasjenige einem Kreis einbeschriebene Sechseck mit max. Flächeninhalt ist das <u>regelmässige</u> <u>Sechseck</u>. $\Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 60°}}$