

Name:

**Fach: Mathematik**

**Klassen: 5Bb und 5Qb**

---

**Dauer der Prüfung: 240 Minuten**

**Hilfsmittel: Grafikrechner TI-83, Fundamentum, Geodreieck, Zirkel, Schreibzeug**

**Das Punktemaximum beträgt 66 Punkte. Die ungerundete Note 6 wird für 58 Punkte erteilt.**

---

Vorbemerkungen:

- Die Lösungswege sind nachvollziehbar anzugeben. Ergebnisse ohne Begründung können mit 0 Punkten bewertet werden.
- Lösungen als Dezimalzahlen sind auf 2 Nachkommastellen zu runden.
- Jede Aufgabe muss auf ein separates Blatt gelöst werden. Teilaufgaben sind deutlich zu nummerieren.

*Viel Erfolg wünschen Ihnen Andreas Stahel und Bernhard Pfammatter!*

---

## 1. Raumgeometrie: (4+1+1.5+2.5+2+2+1= 14 Punkte)

Gegeben sind die drei Geraden g, h und i je durch eine Parametergleichung:

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ -18 \end{pmatrix},$$

$$i: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 36 \\ 36 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}$$

- (a) Zeigen Sie rechnerisch, dass die beiden Geraden g und h weder parallel noch zusammenfallend sind. Berechnen Sie dann die Koordinaten des Schnittpunktes S(0/6/9) von g und h.  
Weisen Sie zudem algebraisch nach, dass auch die dritte Gerade i durch S geht. Die Lösung S(0/6/9) darf **nur** zur Kontrolle, nicht aber zur Herleitung benutzt werden.
- (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Durchstosspunktes I von i mit der xz-Ebene.
- (c) Die Durchstosspunkte A(5/4/0), B(-3/10/0) und C(-1/-4/0) der drei gegebenen Geraden mit der xy-Ebene bilden die Grundfläche der Pyramide P mit der Spitze S(0/6/9). Tragen Sie diese vier Punkte in das Koordinatensystem auf dem Beiblatt ein, verbinden Sie sie zur Pyramide P und heben Sie deren sichtbare Kanten mit Bleistift und die unsichtbaren Kanten mit Bleistift gestrichelt hervor.
- (d) Konstruieren Sie diejenigen Teile der Seitenflächen ABS bzw. ASC von P, die sichtbar sind, also ganz im 1. Oktanten liegen. Die Konstruktionslinien müssen deutlich erkennbar sein! Schraffieren Sie diese beiden Teile mit zwei verschiedenen Farben.
- (e) Berechnen Sie im Dreieck ABS den Winkel  $\alpha$  bei der Ecke A.
- (f) Welche speziellen Eigenschaften besitzt die dreieckige Grundfläche ABC von P? Begründen Sie!
- (g) Berechnen Sie das Volumen V der Pyramide P.

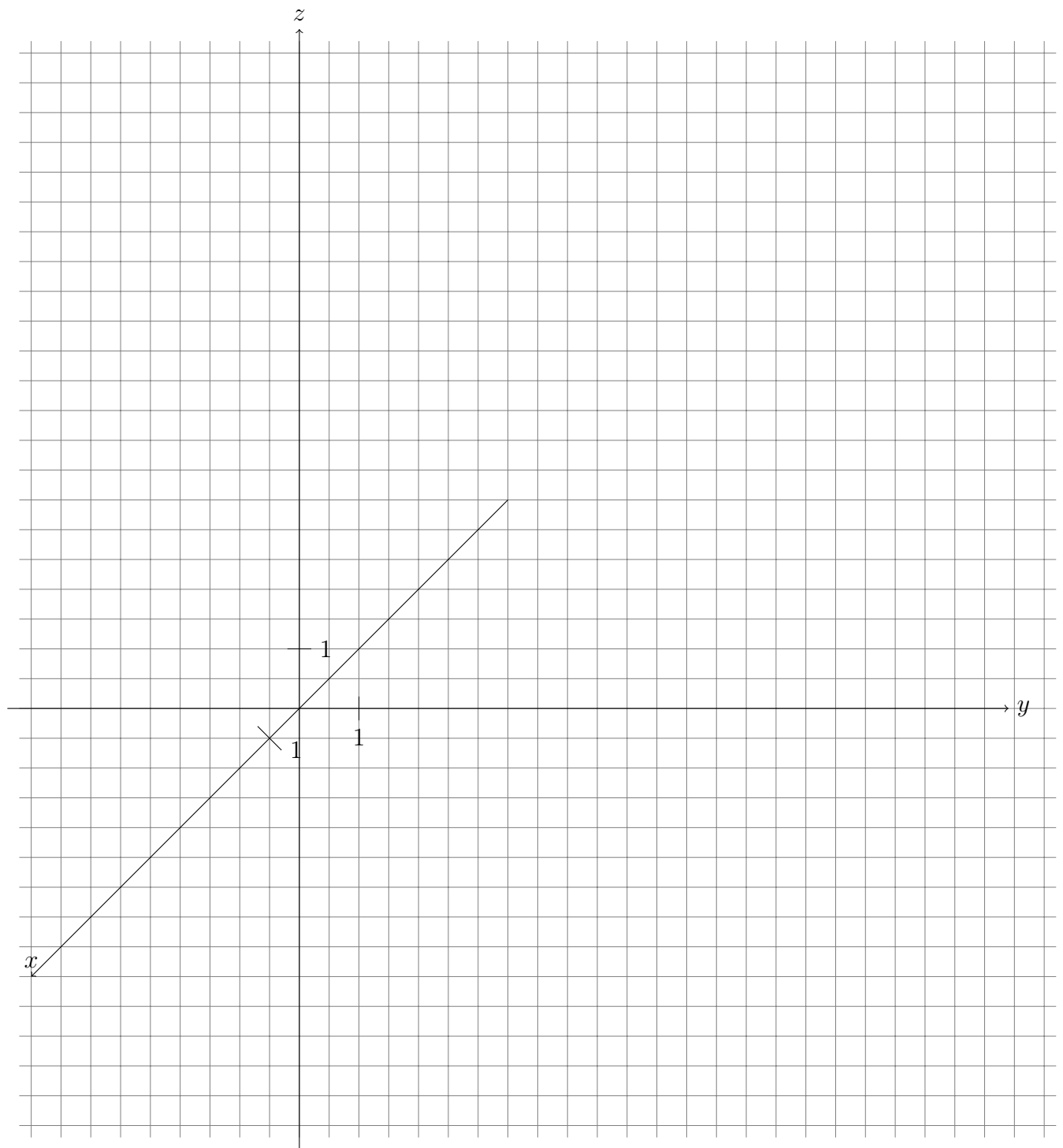


Abbildung 1: Koordinatensystem zur Aufgabe 1

2. Differentialrechnung: (1+1+2+1+2+1.5+1.5=10 Punkte)

Gegeben ist die Funktion  $f$  mit der Gleichung  $f(x) = 2x^2 - 4x - 30$ .

- (a) Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitungsfunktion  $f'(x)$  und  $f''(x)$ .
- (b) Bestimmen Sie die Nullstellen von  $f$ .
- (c) Zeigen Sie mit Hilfe des Differentialquotienten, dass die Teilfunktion  $\tilde{f}(x) = 2x^2$  die Ableitung  $\tilde{f}'(x) = 4x$  besitzt.

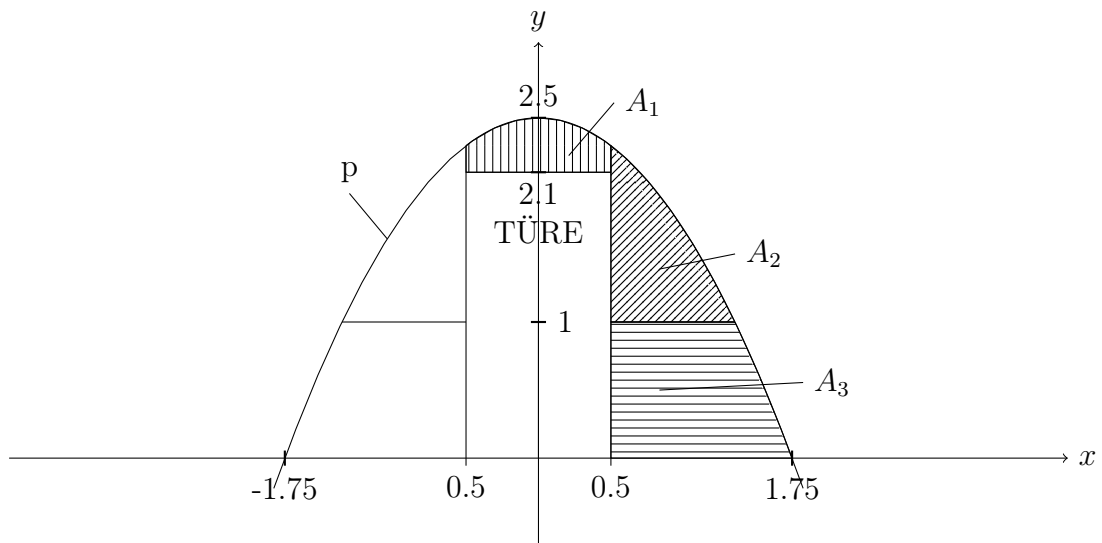
Gegeben ist zudem die Funktion  $g(x) = \sin(3x)$ .

- (d) Berechnen Sie  $g'(x)$  und  $g''(x)$ .
- (e) Bilden Sie den Quotienten  $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ .  
Zeigen Sie, dass die Funktion  $q$  an der Stelle  $x = 1$  stetig ist.
- (f) Geben Sie diejenigen Stellen im Intervall  $]0, \pi[ = 0 < x < \pi$  an, bei denen die Funktion  $q$  nicht definiert ist.
- (g) Berechnen Sie  $q'(x)$ .

3. Integralrechnung: (1+3+2.5+2+1.5+5 = 15 Punkte)

Ein parabelförmiges Fenster hat folgende Abmessungen (vgl. Skizze). Die x- und y-Koordinaten sind in der Einheit Meter gemessen. Die Gleichung der Parabel lautet:

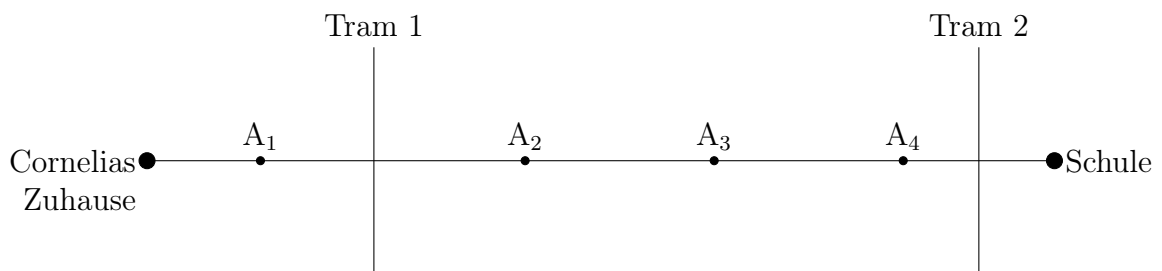
$$p: f(x) = -\frac{40}{49}x^2 + \frac{5}{2}$$



- (a) Zeigen Sie algebraisch, dass die in der Figur gezeichnete Parabel  $p$  die oben angegebene Funktionsgleichung besitzt.
- (b) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks  $A_1$  exakt mittels Stammfunktion. (Die Berechnung mit den Menüs CALC 7:  $\int f(x)dx$  bzw. MATH/MATH 9: fnInt ergibt nicht die volle Punktzahl.)
- (c) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks  $A_2$ .
- (d) Wie gross ist der Flächeninhalt von  $A_3$ ?
- (e) Zeigen Sie algebraisch, dass der Flächeninhalt  $A_{total}$ , den die Parabel und die x-Achse einschliessen, rational ist.
- (f) Berechnen Sie die Gleichung der horizontalen Geraden  $h$  so, dass die beiden Flächenstücke  $A_2$  und  $A_3$  genau gleich gross werden.

4. **Wahrsch'keit und Kombinatorik:** (5+0.5+3+1+2.5+1.5+1.5= 15 Punkte)

Cornelia kommt regelmässig mit dem Tram zur Schule. Auf ihrer Fahrstrecke passiert das Tram die vier Verkehrsampeln  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  und  $A_4$  und kreuzt zwei andere Tramlinien. Die Ampeln geben unabhängig voneinander dem Tram mit je 90 % Wahrscheinlichkeit freie Fahrt. Bei den Kreuzungen mit den anderen Tramlinien hat Cornelias Tram mit 38 % Wahrscheinlichkeit freie Fahrt, d.h. in 62 % der Fälle muss es einem anderen Tram Vortritt lassen (vgl. Skizze).



- (a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender vier Ereignisse für Cornelias Tram:
- A: Es hat an allen vier Ampeln und beiden Kreuzungen freie Fahrt.
- B: Das Tram muss nur an der ersten Ampel und an der zweiten Kreuzung halten.
- C: Die Strassenbahn muss genau an einer Kreuzung und nie an einer Ampel warten.
- D: Cornelias Tram muss an mehr Kreuzungen als Ampeln halten.

Um sich die Zeit im Tram zu verkürzen, schreibt Cornelia die acht Buchstaben ihres Namens auf je ein identisches Kärtchen (C, O, R, N, E, L, I, A).

- (b) Auf wie viele Arten kann sie alle diese acht Buchstaben in eine Reihe legen?
- (c) Sie legt die Kärtchen verdeckt hin, zieht darauf zufällig vier Kärtchen, legt diese in eine Reihe und dreht sie anschliessend um. Wie viele Buchstabenkombinationen gibt es:
  - i. ohne Einschränkungen,
  - ii. die nur Vokale enthalten,
  - iii. die zwei Vokale und zwei Konsonanten aufweisen?
- (d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die vier zufällig gezogenen Kärtchen gerade den Namen von Cornelias Freundin Lena ergeben.

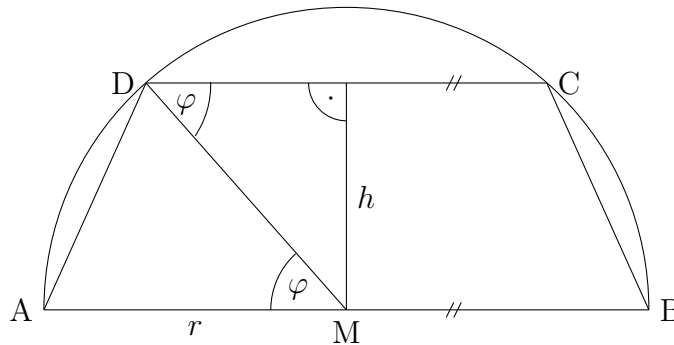
Montags, dienstags und freitags fährt Cornelia gemeinsam mit ihrer Freundin Lena im Tram zur Schule. Fährt das Tram mit mehreren Wagen, so steigen beide in den "Wagen 2" ein, sonst in "Wagen 1". Mittwochs und donnerstags fährt Cornelia alleine zur Schule und benutzt stets "Wagen 1". Laut Angaben der Verkehrsbetriebe verkehren auf Cornelias Linie 85 % aller Trams mit mehr als einem Wagen.

- (e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit denen folgende zwei Ereignisse an einem beliebigen der fünf Schultage eintreten:
  - E: Cornelia fährt zusammen mit Lena im "Wagen 1" zur Schule.
  - F: Cornelia fährt im "Wagen 1" zur Schule.
- (f) Heute ist Cornelia im "Wagen 1" in die Schule gekommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie alleine gefahren?
- (g) Laut Verkehrsbetriebe beträgt der Anteil Schwarzfahrer auf Cornelias Traminie 2 %. Drei Kontrolleure kontrollieren alle 105 Fahrgäste. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei dieser Kontrolle mindestens ein Schwarzfahrer erwischt wird. Mit wie vielen Schwarzfahrern müssen die Kontrolleure bei dieser Kontrolle rechnen?

5. Extremalaufgabe:

(3.5+1.5+7 = 12 Punkte)

Einem Halbkreis mit Radius  $r = \overline{AM} = 5$  cm und Mittelpunkt  $M$  wird ein gleichschenkliges Trapez  $ABCD$  so einbeschrieben, dass die längere Parallelseite  $\overline{AB}$  mit dem Durchmesser zusammenfällt (vgl. Skizze).



Für die ersten beiden Teilaufgaben soll der Winkel  $\varphi = 30^\circ$  betragen.

- (a) Berechnen Sie die Längen der Trapezhöhe  $h$  und der Seiten  $\overline{CD}$  sowie  $\overline{AD}$ .
- (b) Berechnen Sie den Umfang  $U$  und den Flächeninhalt  $F$  dieses Trapezes.

Nun soll der Flächeninhalt des einbeschriebenen Trapezes maximiert werden.

- (c) Berechnen Sie den Winkel  $\varphi$  so, dass der Trapezinhalt maximal wird. Begründen Sie ausreichend und geben Sie auch den Flächeninhalt dieses grösstmöglichen Trapezes an.

**Tipp:** Stellen Sie  $h$  und  $\frac{\overline{CD}}{2}$  in Abhängigkeit von  $\varphi$  dar.

**Hinweis:** 7 Punkte werden nur für eine vollständig algebraische Lösung vergeben. Je nach Einsatz des Grafikrechners erfolgt ein Punkteabzug.