Lösung Integralrechnung (1,5 + 2 + 2,5 + 2,5 + 2,5 = 11)

a) $f(x) = 0{,}25\,x^3 - 1{,}75\,x^2 + 9 \quad \Rightarrow \quad F(x) = 0{,}0625\,x^4 - 0{,}58\overline{3}\,x^3 + 9x + C$

1,5 oder $F(x) = \frac{1}{16}x^4 - \frac{7}{12}x^3 + 9x + C$

b) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_{-2}^{6} f(x)\,dx$ mit fnInt-Befehl & Zero für Nullstellen für Grenzen: $(-2|0), (3|0), (6|0)$

0,5 0,5 0,5 in c)

$\int_{-2}^{6} 0{,}25x^3 - 1{,}75x^2 + 9 \; dx = 21{,}\overline{3}$ 1

c) Flächeninhalt $A = \int_{-2}^{3} f(x)\,dx + \left|\int_{3}^{6} f(x)\,dx\right| = \frac{1375}{48} + \frac{117}{16} \Rightarrow$ 1,5

$A = 35{,}958\overline{3}$ 0,5

e) ~~d)~~ $\frac{A_1}{2} = \int_{-2}^{u} f(x)\,dx$ 0,5 , $\frac{A_1}{2} = \frac{1375}{96}$

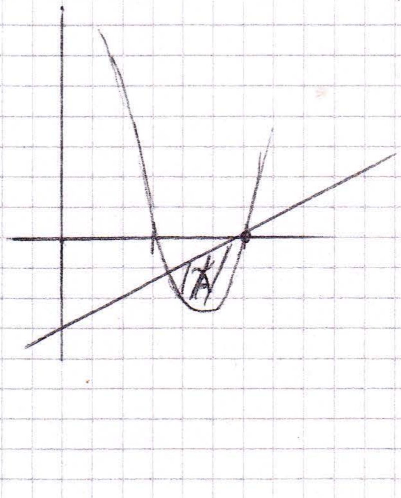
$\frac{1375}{96} = F(u) - F(-2)$ 0,5 für Gleichung

$\frac{1}{16}u^4 - \frac{7}{12}u^3 + 9u - \underbrace{\left(1 - \frac{7}{12}\cdot(-8) - 18\right)}_{-12\frac{1}{3}} \Rightarrow$

$\underbrace{\frac{191}{96}}_{Y_2} = \underbrace{\frac{1}{16}u^4 - \frac{7}{12}u^3 + 9u}_{Y_3}$ 1

in TR & intersect $\Rightarrow u \approx 0{,}222$ 0,5

d) $g(x) = 0{,}5x - 3$ Schnittpunkte $S_1(3{,}37|-1{,}31)$ & $S_2(6|0)$ 0,5



$A_{III} = \int_{3,37}^{6} g(x) - f(x)\;dx \approx 5{,}336$ 0,5 0,5

also Teilfläche von ~5,34 und 0,5

$\underbrace{A_2}_{=\frac{117}{16} = 7{,}3125} - A_{III} \approx 1{,}98$ 0,5

alles mit TR intersect & fnInt

Differentialrechnung

a) z.B. mit TRACE / TABLE / VALUE : $P(3/2{,}5)$ ✓ 1P.

oder von Hand: $f(3) = 2{,}5$

b) $f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{4} x^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} x + \frac{3}{2}$

$= x^3 - \frac{3}{2} x^2 - \frac{3}{2} x + \frac{3}{2}$ 1P.

$f''(x) = 3x^2 - 3x - \frac{3}{2}$ 1P. 2P.

c) z.B. mit dy/dx oder von Hand: $f'(2) = 0{,}5$ ½P.

$\Rightarrow$ $f'(x) \overset{!}{=} 0{,}5$ ½P.

z.B. mit intersect $(Y_2 = f'(x) ; Y_3 = 0{,}5)$

$x_1 = -1$ ½P., $x_2 = 0{,}5$ ½P. 2P.

d) WP: $f''(x) \overset{!}{=} 0$ oder $f'(x)$ extremal ½P.

z.B. mit intersect oder zero // minimum, maximum

$x_{WP} = 1{,}37$ ½P.

z.B. mit trace

$y_{WP} = f(x_{WP}) = -1{,}75$ ½P.

$\Rightarrow$ $WP(1{,}37 / -1{,}75)$ 1,5P.

e) mit minimum: $T(-1{,}10 / -3{,}53)$ 1P.

f) $g'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2cx + \frac{3}{2}$ ½ P.

$g'(-1) = -1 - \frac{3}{2} - 2c + \frac{3}{2} = -1 - 2c$ ½ P.

$g'(-1) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow -1 - 2c = 0$ ½ P.

$-1 = 2c$

$\underline{\underline{-\frac{1}{2} = c}}$ ½ P. <u>2P.</u>

g) $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ½ P.

$\Delta x = x - 1{,}25$ ½ P.

$\Delta y = f(x) - (-0{,}5) = f(x) + 0{,}5$ ½ P.

$\Rightarrow d = \sqrt{(x - 1{,}25)^2 + (f(x) + 0{,}5)^2}$

mit minimum: ½ P.

$\underline{\underline{d_{min} = 1{,}02}}$ ½ P. <u>2,5P.</u>

Lösung Vektorgeometrie

a. siehe Beiblatt 1 Punkt

b. $\overrightarrow{FM} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 2-1{,}5 \\ 2-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}$ 0,5

$|\overrightarrow{FM}| = \sqrt{4+0{,}25+16} = 4{,}5$ 0,5

d (Durchmesser Apfel) $= 2 \cdot 4{,}5 = \underline{\underline{9cm}}$ 0,5

1,5 Punkte

c. $\overrightarrow{MF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -0{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 1{,}6-2 \\ 2{,}4-2 \\ 1{,}3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}4 \\ 0{,}4 \\ -0{,}7 \end{pmatrix}$ 0,5

$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MA}}{|\overrightarrow{MF}| \cdot |\overrightarrow{MA}|}\right)$

0,5

$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{-0{,}8-0{,}2-2{,}8}{4{,}5 \cdot \sqrt{0{,}16+0{,}16+0{,}49}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-3{,}8}{4{,}5 \cdot 0{,}9}\right)$

0,5

$\underline{\underline{\varphi \approx 159{,}76°}}$ 0,5

2 Punkte

d. $\overrightarrow{MP} = k \cdot \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -0{,}4k \\ 0{,}4k \\ -0{,}7k \end{pmatrix}$ 0,5

$|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{0{,}81k^2} = \pm 0{,}9k = 4{,}5$ 0,5

$\Rightarrow k = \frac{4{,}5}{\pm 0{,}9} = \pm 5$ 0,5

Nur positives k beachten, da der Wurm von M nach A kriecht.

$P(-0{,}4 \cdot 5 + 2 / 0{,}4 \cdot 5 + 2 / -0{,}7 \cdot 5 + 2) = P(0/4/-1{,}5)$ 0,5

2 Punkte

e. Konstruktion siehe Beiblatt 1

$\overrightarrow{WP} = \overrightarrow{FM}$ mit $W(x/y/z)$

$\begin{pmatrix} 0-x \\ 4-y \\ -1{,}5-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}$ 0,5

$\left.\begin{array}{l} 0 - x = -2 \Rightarrow x = 2 \\ 4 - y = 0{,}5 \Rightarrow y = 3{,}5 \\ -1{,}5 - z = -4 \Rightarrow z = 2{,}5 \end{array}\right\}$ 0,5

$\underline{\underline{W(2/3{,}5/2{,}5)}}$ 0,5

2,5 Punkte

f. Konstruktion siehe Beiblatt 2

$$\overrightarrow{WP} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-3,5 \\ -1,5-2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0,5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1,5 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0,5 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad 0,5$$

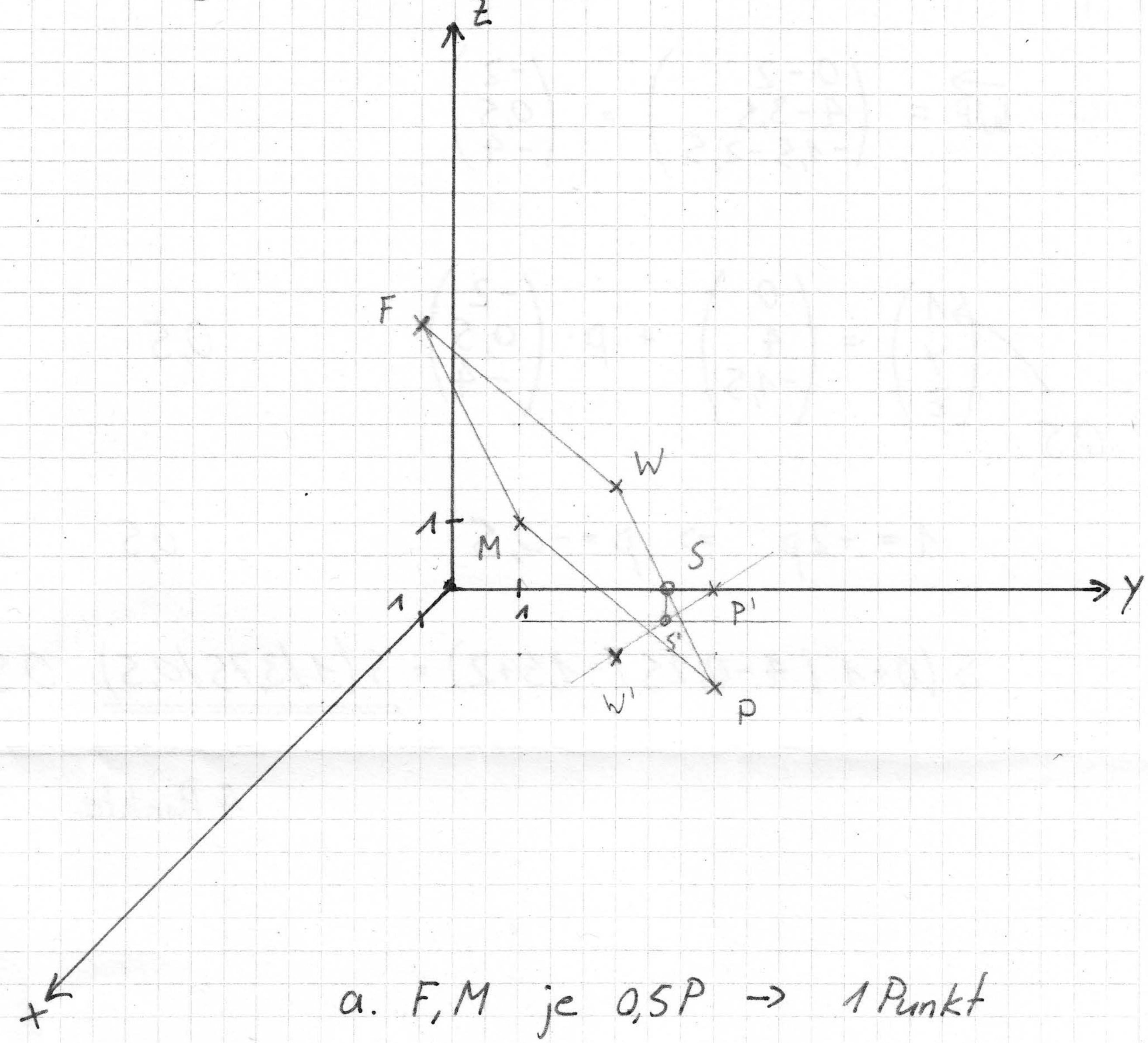
0,5

$$1 = -2p \Rightarrow p = -0,5 \qquad 0,5$$

$$S(0+1 / 4-0,25 / -1,5+2) = \underline{\underline{S(1/3,75/0,5)}} \quad 0,5$$

4 Punkte

Lösung Beiblatt



a. F, M je 0,5P → 1 Punkt

e. Konstruktion W → 1 Punkt

f. W' → 0,5P
P' → 0,5P
S' → 0,5P
S → 0,5P

2 Punkte

Lösung für Ersatz - P

e. Konstruktion siehe Beiblatt 1

$\overrightarrow{WP} = \overrightarrow{FM}$ mit $W(x/y/z)$

$$\begin{pmatrix} 0-x \\ 4,5-y \\ -1-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0,5 \\ -4 \end{pmatrix}$$ 0,5

$$\left.\begin{array}{l} 0-x=-2 \Rightarrow x=2 \\ 4,5-y=0,5 \Rightarrow y=4 \\ -1-z=-4 \Rightarrow z=3 \end{array}\right\}$$ 0,5

$\underline{\underline{W(2/4/3)}}$ 0,5

2,5 Punkte

f. Konstruktion siehe Beiblatt 2

$$\overrightarrow{WP} = \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4,5-4 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0,5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4,5 \\ -1 \end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -2 \\ 0,5 \\ -4 \end{pmatrix}$$ 0,5

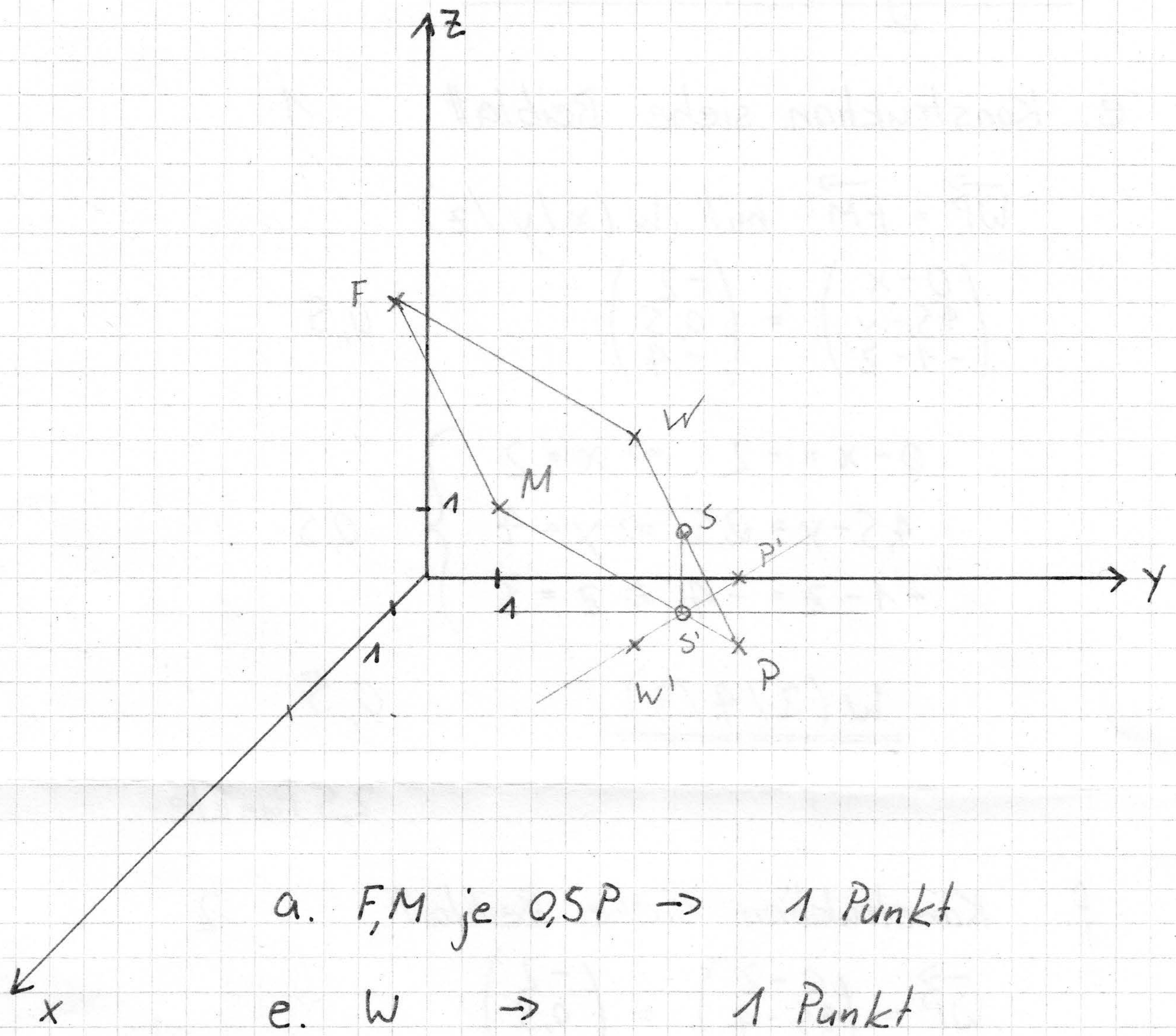
0,5

$1=-2p \Rightarrow p=-0,5$ 0,5

$S(0+1/4,5-0,25/-1+2) = \underline{\underline{S(1/4,25/1)}}$ 0,5

4 Punkte

Beiblatt zu Ersatz-P



a. F, M je 0,5P → 1 Punkt

e. W → 1 Punkt

f. $\left.\begin{array}{l} W' \to 0{,}5P \\ P' \to 0{,}5P \\ S' \to 0{,}5P \\ S \to 0{,}5P \end{array}\right\}$ 2 Punkte total 15P. **Wahrscheinlichkeitsrechnung – mögliche Lösungswege**

1P. a) $P = \frac{g}{m} = \frac{1}{64} = 0{,}015625 = 1{,}5625\% \approx 1{,}56\%$ (1)

$1\frac{1}{2}$P. b) $P(\geq 1 \text{ mal Doppel-8}) = 1 - P(\text{nie Doppel-8})$ ($\frac{1}{2}$) (Gg.w'keit)

$= 1 - \underbrace{\left(\frac{63}{64}\right)^{20}}_{1/2} \approx 1 - 0{,}7298$

$= 0{,}2702 = 27{,}02\%$ (1/2)

2P. c) $1 - \left(\frac{63}{64}\right)^n \geq 0{,}95$

Grenzfall: $1 - \left(\frac{63}{64}\right)^n = 0{,}95 \quad | -1 \quad | \cdot(-1)$

bis hier: (1/2)

$\left(\frac{63}{64}\right)^n = 0{,}05 \quad | \log$

$n \cdot \log\left(\frac{63}{64}\right) = \log 0{,}05 \quad | : \log(\ldots)$

$n = \frac{\log 0{,}05}{\log\left(\frac{63}{64}\right)} = 190{,}23$

Gleichung lösen (1)

Also nach 191 Würfen (1/2)

1P. d) $P = \frac{g}{m}$ $\quad g$: 1-1, 2-2, 3-3, 4-4, 5-5, 6-6, 7-7, 8-8

8 günstige Fälle (1/2)

$= \frac{8}{64} = \frac{1}{8} = 0{,}125 = 12{,}5\%$ (1/2)

$1\frac{1}{2}$P. e) g: 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6, 6-7, 7-8 und umgekehrt → 14

14 günstige Fälle: (1)

$P = \frac{g}{m} = \frac{14}{64} = \frac{7}{32} = 0{,}21875 = 21{,}875\%$ (1/2)

2P. f) g: 2-4, 2-6, 2-8, 3-6, 4-6, 4-8, 6-8 und umgekehrt $\rightarrow$ 14

14 günstige Fälle: $1\frac{1}{2}$

$$P = \frac{g}{m} = \frac{14}{64} = \underline{\underline{\frac{7}{32}}} = 0{,}21875 = \underline{\underline{21{,}875\%}} \quad \frac{1}{2}$$

3P. g) $$P = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12} + \frac{11}{72}\cdot\frac{11}{72} + \frac{7}{24}\cdot\frac{7}{24} + \underbrace{P(Rest)}\cdot P(Rest)$$

$$= \frac{1}{144} + \frac{121}{5184} + \frac{49}{576} + \frac{289}{1296}$$

$$= 1 - \frac{1}{12} - \frac{11}{72} - \frac{7}{24} = \frac{17}{36} = 0{,}47\overline{2} \quad 1/2$$

4 günstige Fälle: 1

W'keiten der 4 Fälle: 1

$$= \underline{\underline{\frac{877}{2592}}} \approx 0{,}3383 = \underline{\underline{33{,}83\%}} \quad \frac{1}{2}$$

3P. h) $$P = P(3\text{-}2\text{-}0)\cdot 6 + P(3\text{-}1\text{-}1)\cdot 3 + P(2\text{-}2\text{-}1)\cdot 3$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{11}{72}\cdot\frac{17}{36}\cdot 6 + \frac{1}{12}\cdot\left(\frac{7}{24}\right)^2\cdot 3 + \left(\frac{11}{72}\right)^2\cdot\left(\frac{7}{24}\right)\cdot 3$$

$$\approx 0{,}0361 + 0{,}0213 + \underbrace{0{,}0204}$$

$$= 0{,}0778 = \underline{\underline{7{,}78\%}} \quad 1$$

wird vom TR nicht als (echter) Bruch erkannt

Erkennen der 3 Fälle: 1

Richtige Faktoren aus Anzahl der Permutationen: 1

5) Folgen und Reihen

a) $q = \frac{72}{81} = \frac{8}{9}$ (0.5 P),

$a_{10} = 81 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^9 \approx 28.06$ (0.5 P)

b) $s_{40} = 81 \cdot \frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{40}}{1-\frac{8}{9}} \approx 722.44$ (1 P) oder `cumsum`

c) Ja, der Grenzwert beträgt $s_n = 81 \cdot 9 = 729$ (1 P)

d) $70 = 140 \cdot 0.9^{n-1}$ (0.5 P) mit Grafik, Listen oder Logarithmen $n = 8$ (1 P)

e) $q = \sqrt[7]{2} = 2^{\frac{1}{7}}$ (0.5 P) und

Folge: $c_n = 20 \cdot q^{n-1} = 20 \cdot 2^{\frac{n-1}{7}}$ (0.5 P)

Gleichung $140 \cdot 0.9^{n-1} = 20 \cdot 2^{\frac{n-1}{7}}$. (0.5 P)

Lösung mit TR: $n = 10.52$ (0.5 P),

die Population C wird also im 11. Jahr erstmals grösser als die von B. (0.5 P)

f) Einsetzen von $n = 8$ liefert $d_n = \frac{21}{0.05+0.9^7} \approx 39.75$ also nahezu $2 \cdot 20$. (0.5 P)

Der Grenzwert für $n \to \infty$ ist: $\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} \frac{21}{0.05+0.9^{n-1}} = \frac{21}{0.05} = 420$. (1.5 P)