Fach	**Mathematik**
Klasse(n)	**Alle Maturklassen**

Dauer der Prüfung:	4 Std.
Erlaubte Hilfsmittel:	Taschenrechner TI83+ oder TI84+ und Fundamentum

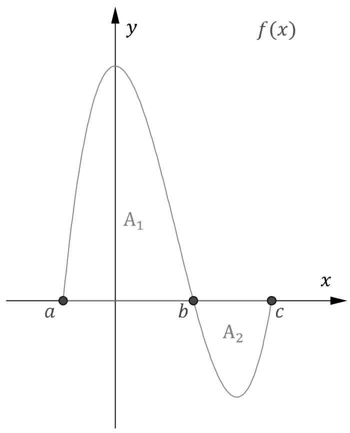
Vorbemerkungen:

- Die Lösungswege sind nachvollziehbar anzugeben. Ergebnisse ohne Begründung können mit 0 Punkten bewertet werden.
- Jede Aufgabe muss auf ein separates Blatt gelöst werden. Teilaufgaben sind deutlich zu nummerieren.
- Es können maximal 60 Punkte erreicht werden. Die ungerundete Note 6 wird für 54 Punkte erteilt.

Viel Erfolg wünschen Thomas Baier, Christian Boller, Barbara Fankhauser, Michaela Heinis und Philippe Meili!

Aufgabe 1 Integralrechnung ($1.5 + 2 + 2.5 + 2.5 + 2.5 = 11$ Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0.25x^3 - 1.75x^2 + 9$ mit den Nullstellen a, b und c.



a) Geben Sie die Funktionsgleichung der Stammfunktion von $f(x)$ an.

b) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\int_a^c f(x)\ dx$ für diese Funktion.

c) Bestimmen Sie den von der Kurve f und der x-Achse insgesamt eingeschlossenen Flächeninhalt.

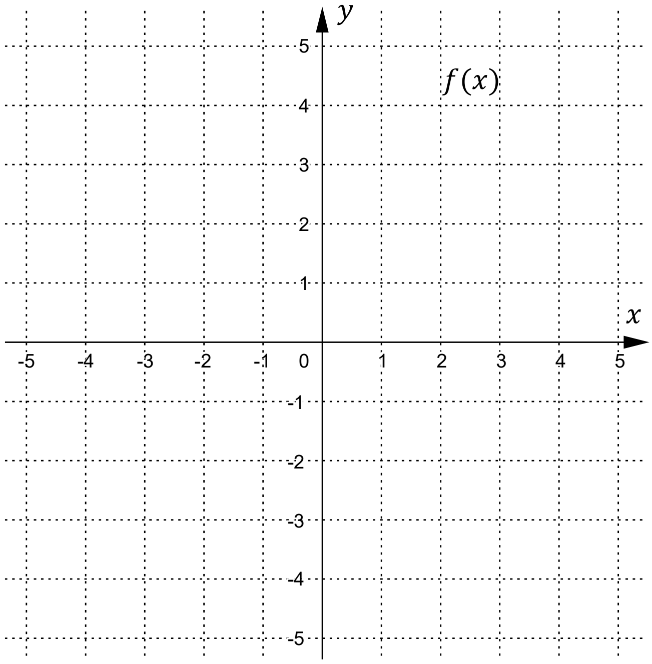
Die Kurve f bildet zwei Flächen A_1 und A_2 mit der x-Achse.

d) Die Gerade $g(x) = 0.5x - 3$ teilt die Fläche A_2 in zwei Teilflächen. Bestimmen Sie die Flächeninhalte der beiden so entstehenden Teilflächen.

e) Eine zur y-Achse parallele Gerade p soll so gezeichnet werden, dass sie die Fläche A_1 in zwei gleich grosse Hälften teilt. An welcher Stelle u schneidet diese Gerade p die x-Achse?

Aufgabe 2 Differentialrechnung $(1 + 2 + 2 + 1.5 + 1 + 2 + 2.5 = 12$ Punkte)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - 2$.



a) Überprüfen Sie, dass der Punkt $\mathrm{P}(3|2.5)$ auf der Kurve f liegt.

b) Berechnen Sie die Gleichungen von $f'(x)$ und $f''(x)$.

c) An welchen Stellen besitzt die Kurve f die gleiche Steigung wie an der Stelle $x = 2$?

d) Die Kurve f besitzt offensichtlich zwei Wendepunkte. Bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W, der rechts von der y-Achse liegt.

e) Bestimmen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T der Kurve f, der links von der y-Achse liegt.

f) Betrachten Sie nun die Kurve g mit einem Parameter c:
$g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + c\,x^2 + \frac{3}{2}x - 2$
Bestimmen Sie c so, dass die Kurve g einen Tiefpunkt an der Stelle $x = -1$ besitzt.

g) Bestimmen Sie den kürzesten Abstand d zwischen der Kurve f und dem Punkt $\mathrm{Q}(1.25|\text{-}0.5)$.

Aufgabe 3 Vektorgeometrie ($1+1.5+2+2+2.5+4=13$ Punkte)

Apfelwurm Fridolin (F) befindet sich auf der Oberfläche eines kugelförmigen Apfels, genau an der Stelle $\mathrm{F}(4|1.5|6)$. Der Mittelpunkt (M) des Apfels befindet sich an der Stelle $\mathrm{M}(2|2|2)$. (Alle Längen sind in cm angegeben.)

a) Zeichnen Sie den Aufenthaltsort F von Fridolin und den Mittelpunkt M des Apfels in das Koordinatensystem im Anhang.

b) Wie gross ist der Durchmesser d des Apfels?

c) Fridolin frisst sich nun auf geradem Weg bis zum Mittelpunkt des Apfels, dort sieht er, dass von M aus bereits der Tunnel eines anderen Wurms in die Richtung von Punkt $\mathrm{A}(1.6|2.4|1.3)$ existiert. Berechnen Sie den Winkel $\sphericalangle\mathrm{FMA}$.

d) Da Fridolin neugierig ist, wer den Tunnel $\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ gefressen hat, kriecht er in diesem Tunnel geradlinig weiter bis an die Apfeloberfläche. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes P auf der Apfeloberfläche.

e) Am Punkt P angekommen, merkt Fridolin, dass der andere Wurm bereits in Richtung des Punktes W weitergefressen hat. Ihm fällt auf, dass die Punkte FMPW in dieser Reihenfolge ein Parallelogramm bilden. Konstruieren Sie dieses Parallelogramm im Koordinatensystem (Anhang). Berechnen Sie zur Kontrolle auch die Koordinaten von W.

Falls Sie P in d) nicht berechnet haben, können Sie $P(0|4.5|\text{-}1)$ benutzen.

f) Fasziniert von diesem ebenso geometrieverliebten Wurm kriecht Fridolin (von P aus) sofort in Richtung W hinterher. Plötzlich wird der Apfel unsanft mit einem Messer in zwei Teile geschnitten. Das Messer dringt senkrecht zur xy-Ebene (nämlich parallel zur yz-Ebene und $1\ \mathrm{cm}$ in positiver x-Richtung) durch den Apfel. In welchem Punkt S wird dabei der Tunnel $\overline{\mathrm{WP}}$ durchtrennt? Begründen Sie Ihre Antwort durch eine Konstruktion und berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes S.

Aufgabe 4 Wahrscheinlichkeit $(1 + 1.5 + 2 + 1 + 1.5 + 2 + 3 + 3 = 15$ Punkte)

Calvin hat zwei reguläre Oktaeder, deren Seitenflächen jeweils die Augenzahlen 1 bis 8 tragen. Er wirft die beiden Oktaeder gleichzeitig.

a) Mit dem ersten Versuch wirft Calvin gleich eine Doppel-8. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit P für dieses Ereignis?

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, in 20 Versuchen mindestens eine Doppel-8 zu werfen!

c) Nach wie vielen Würfen übersteigt die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine Doppel-8 geworfen zu haben, erstmals 95% ?

Wie gross ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, beim gleichzeitigen Werfen dieser zwei Oktaeder das folgende Ereignis zu erhalten?

d) „Paar“: beide Oktaeder zeigen die gleiche Augenzahl.

e) „Nachbarn“: die Augenzahlen auf den beiden Oktaedern unterscheiden sich um 1.

f) „Verwandte“: die Augenzahlen auf den beiden Oktaedern sind verschieden, haben aber mindestens einen gemeinsamen Teiler grösser als 1.

Nun spielt Calvin gegen Hobbes folgendes Spiel: Calvin fängt an. Er wirft gleichzeitig zwei reguläre Dodekaeder mit den Augenzahlen von 1 bis 12. Dann ist Hobbes an der Reihe und wirft dieselben zwei Dodekaeder. Damit ist eine Runde abgeschlossen.
Wer ein „Paar“ wirft, erhält 3 Punkte. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $\frac{1}{12}$.
Wer „Nachbarn“ wirft, erhält 2 Punkte. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $\frac{11}{72}$.
Wer „Verwandte wirft, erhält 1 Punkt. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $\frac{7}{24}$.

g) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach der ersten Runde beide Spieler gleich viele Punkte haben?

h) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Calvin nach drei Runden 5 Punkte hat?

Aufgabe 5 Folgen und Reihen $(1 + 1 + 1 + 1.5 + 2.5 + 2 = 9$ Punkte)

Eine geometrische Zahlenfolge beginnt mit den Folgengliedern a_n: $81, 72, 64, \ldots$

a) Welchen Wert hat das 10. Folgenglied?

b) Notieren Sie für diese Folge eine Formel der Partialsumme s_n und berechnen Sie damit den Wert von s_{40}.

c) Ist die Folge der n-ten Partialsummen dieser Zahlenfolge konvergent? Wenn ja, geben Sie eine Formel zur Berechnung dieses Grenzwerts und seinen exakten Wert an. Wenn nein, begründen Sie wieso es keinen Grenzwert gibt.

Auf einer Nordsee-Insel wird über mehrere Jahre die Populationsgrösse einer Vogelart B ausgezählt. Im ersten Jahr sind es $b_1 = 140$ Brutpaare. Die Anzahl der brütenden Vogelpaare im n-ten Jahr kann angenähert werden durch die Zahlenfolge:

$$b_n = 140 \cdot 0.9^{n-1}$$

d) Nach wie vielen Jahren n wird die Anzahl Brutpaare b_n nach diesem Modell erstmals auf weniger als die Hälfte zurückgegangen sein?

e) Ein Biologe entdeckt, dass die Abnahme der Vogelpopulation der Art B durch die Einwanderung einer Vogelart C verursacht sein könnte. Im 1. Jahr der Beobachtung gab es von der Art C nur $c_1 = 20$ Brutpaare auf der Insel, im 8. Jahr hat sich ihre Population aber bereits verdoppelt und wird sich nach der Prognose des Biologen auch weiterhin alle 7 Jahre verdoppeln. In welchem Jahr wird die Population der Art C nach dieser Annahme erstmals grösser als die der Art B?

f) Eine Kollegin macht den Biologen darauf aufmerksam, dass die Populationsgrösse von C aufgrund der Nahrungsknappheit nicht ewig exponentiell wachsen kann. Sie schlägt vor, die Anzahl Brutpaare der Art C durch folgendes Modell zu beschreiben:

$$d_n = \frac{21}{0.05 + 0.9^{n-1}}$$

Zeigen Sie, dass sich auch nach diesem Modell die Brutpopulation der Art C in den ersten 7 Jahren (näherungsweise) verdoppelt, längerfristig aber eine bestimmte feste Populationsgrösse erreicht, die nicht überschritten wird.

Anhang: Koordinatensystem für Aufgabe 3