

Aufgabe Raumgeometrie

2P a) → Büblatt

1P b) $g: \vec{x} = \vec{p} + s\vec{a}$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x=0 \Rightarrow 9-3s=0 \quad | +3s$$

$$9=3s \quad | :3$$

$$\underline{3=s} \quad \frac{1}{2}P$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Damit gilt: W(0|7|3) $\frac{1}{2}P$

1P c) Büblatt

1P d) $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\frac{1}{2}P$

$$\Rightarrow |\vec{AC}| = \sqrt{6^2 + 12^2 + 2^2} \approx \underline{13,56 \text{ m}} \quad \frac{1}{2}P$$

Die Länge der AC-Kante ist etwa 13,56 m.

$\frac{1}{2}P$ e) (i) $S = g \cap h$

mit: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$g \cap h: \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1P$$

Gleichungssystem:
$$\begin{cases} x: 9-3s = 9+3t \\ y: 1+2s = 13+6t \\ z: 6-s = 6+t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x: -s = t \\ y: s = 6+3t \\ z: -s = t \end{cases} \quad \left. \vphantom{\begin{cases} x: -s = t \\ y: s = 6+3t \\ z: -s = t \end{cases}} \right\} \frac{1}{2}P$$

Mit Einsetzungsverfahren oder TR $\Rightarrow$

$$s = 6-3s$$

$$4s = 6$$

$$s = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

und damit: $t = -\frac{3}{2}$ $1P$

Für S ergibt sich:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 9 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\frac{1}{2} \\ 4 \\ 4\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Also: $S(4\frac{1}{2} | 4 | 4\frac{1}{2})$ 1/2 P

(ii) Schnittwinkel φ :

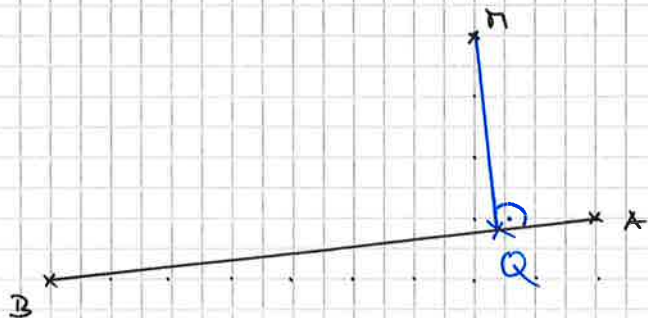
$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2+2^2+1^2} \cdot \sqrt{3^2+6^2+1^2}} \quad 1P$$

$$\cos(\varphi) = \frac{(-3)(3) + 2 \cdot 6 + (-1)(1)}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{46}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{-2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{46}}$$

$\Rightarrow \varphi \approx 85,48^\circ$ 1/2 P

3 1/2 P f) Bemerkung: Die Punkte A, B und M liegen in einer Ebene (Höhe) $\Rightarrow$ Skizze



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0-9 \\ 14-13 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1/2 P$$

$$Q \in \overline{AB} \Rightarrow Q \in \vec{a} \text{ mit } \vec{a}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Q(9-9s | 13+s | 6) \quad 1/2 P$$

$$\vec{MQ} = \begin{pmatrix} 9-9s-7 \\ 13+s-16 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-9s \\ -3+s \\ 0 \end{pmatrix} \quad 1/2 P$$

Für kürzeste Strecke $\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{PQ}$
 $\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{PQ} = 0$

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-9s \\ -3+s \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \quad 1/2 P$$

$$(-9) \cdot (2-9s) + 1(-3+s) \stackrel{!}{=} 0$$

$$82s = 21$$

$$s = \frac{21}{82} \approx 0,256 \quad 1/2 P$$

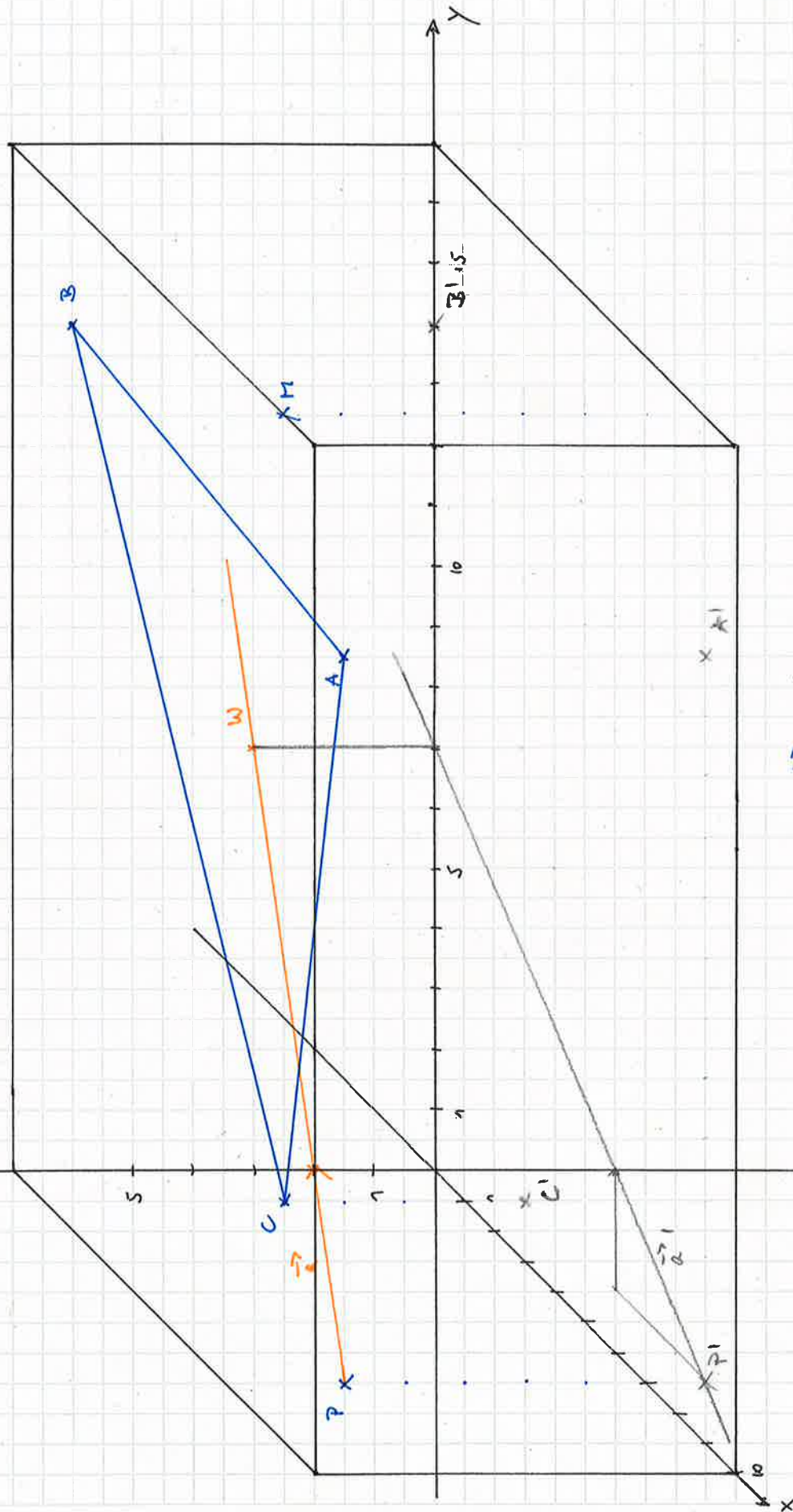
$$\Rightarrow |\vec{PQ}| = \sqrt{(2-9s)^2 + (-3+s)^2} \approx 2,76 \text{ m}$$

Damit ergibt sich für den kürzesten Abstand der Kugel zum Spiegel: $2,76 \text{ m} - 0,25 \text{ m} \approx 2,51 \text{ m}$

Die Kugel ist also ca $2\frac{1}{2} \text{ m}$ vom Spiegel entfernt.

Lösung Aufgabe

Raumgeometrie



Punkte:

- a) $P, \hat{\alpha}, \hat{\alpha}', Q, j^c, 1/2 \Rightarrow a) 2P$
- c) $ABC + D = 1P$

Vorschlag für einen Lösungsschlüssel

a) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d = 1000 + (48 - 1) \cdot 250 = 12'750$ (1)

b) Anzahl Arbeitstage: $S_n = n \cdot a_1 + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1) \cdot d = 48 \cdot 1000 + \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 47 \cdot 250 = 330'000$ (1/2)

Oder: $S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = 48 \cdot \frac{1000 + 12'750}{2} = 330'000$

Honig-Menge: $m = S_n \cdot 5 \text{ mg} = 1'650'000 \text{ mg} = 1.65 \text{ kg}$ (1/2)

c) $s_\infty = a_1 \cdot \frac{1}{1 - q} = \frac{5}{1 - 0.95} = 100 \text{ mg}$ (1)

d) Geometrische Folge: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 5 \cdot 0.95^{n-1}$ (1/2)

$$n = \frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log(q)} + 1 = \frac{\log\left(\frac{1}{5}\right)}{\log(0.95)} + 1 = 32.38$$
 (1)

(1/2) **Am 33. Tag** produziert eine Biene erstmals weniger als 1 mg Honig pro Tag.

Bis dann wird sie

$$S_{33} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 5 \cdot \frac{1 - 0.95^{33}}{1 - 0.95} = 81.597 \text{ mg}$$
 (1/2)

Honig gesammelt haben.

Man könnte hier auch $n = 32$ akzeptieren, da die Frage so verstanden werden kann: Wie viel Honig wird in der Zeit gesammelt, in der die Biene mindestens 1mg pro Tag abliefern. Das wäre dann $S_{32} = 80.63 \text{ mg}$.

e) $n_1 = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{10'000 - 1000}{250} + 1 = 37 \text{ Tage}$ (1/2)

Am 37. Tag werden zum ersten Mal neue Königinnen schlüpfen.

Das erste Volk teilt sich nach 37 Tagen, d.h. der 38. Tag ist gleichzeitig Tag 1 von zwei neuen Völkern. Diese starten mit je 5000 Arbeiterinnen. Bis sie sich wieder teilen, dauert es

$$n_2 = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{10'000 - 5000}{250} + 1 = 21 \text{ Tage.}$$
 (1)

Von jetzt an dauert es immer 21 Tage, bis sich ein Volk wieder aufteilt. Es gibt also ab der ersten Teilung:

$$k = \frac{150 - 37}{21} = 5.38 \text{ Generationen, also } v = 2^{5+1} = 64 \text{ Völker}$$
 (1/2)

- f) Bis 64 Völker bestehen, dauert es genau $n = 37 + 5 \cdot 21 = 142$ Tage (am Morgen des 143. Tages). In den verbleibenden 8 Tagen ist jedes dieser 64 Völker weiter gewachsen, und zwar auf

$$a_8 = a_1 + (n - 1) \cdot d = 5000 + 7 \cdot 250 = 6750 \text{ Tiere.}$$

Insgesamt leben also $64 \cdot 6750 = 432'000$ Tiere.

3A) $h(x) = 2x^2 - 3x$

• $h'(x) = 4x - 3$ (Abl. regeln für Potenzf.) $\frac{1}{2}$

• $h(x) = x(2x - 3)$ $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = 2x - 3 & v'(x) = 2 \end{cases}$ $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow h'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 1(2x - 3) + x \cdot 2$
 $= 2x - 3 + 2x = 4x - 3$ $\checkmark$

• $h(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x)$
 $= 2x^2 + 4x \cdot \Delta x + 2\Delta x^2 - 3x - 3\Delta x$ $\checkmark$

$\Rightarrow h'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} = \frac{2x^2 + 4x \cdot \Delta x + 2\Delta x^2 - 3x - 3\Delta x - 2x^2 + 3x}{\Delta x}$ $\frac{1}{2}$

$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(4x + 2\Delta x - 3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x + 2\Delta x - 3)$

$= 4x - 3$ $\square$ $\frac{1}{2}$

(5)

B) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $f(0) = 0$ $f''(0) = 8$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $\frac{1}{2}$ $f'(0) = 2$ $f(2) = 16$

$f''(x) = 6ax + 2b$ $\frac{1}{2}$

$f(0) = 0 = 0 \Rightarrow d = 0$ $\frac{1}{2}$; $f'(0) = 2 = c$ $\frac{1}{2}$

$f''(0) = 2b = 8 \Rightarrow b = 4$ $\frac{1}{2}$

$f(2) = 16 = 8a + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \Rightarrow 16 = 8a + 20 \quad | -20 : 8$

$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

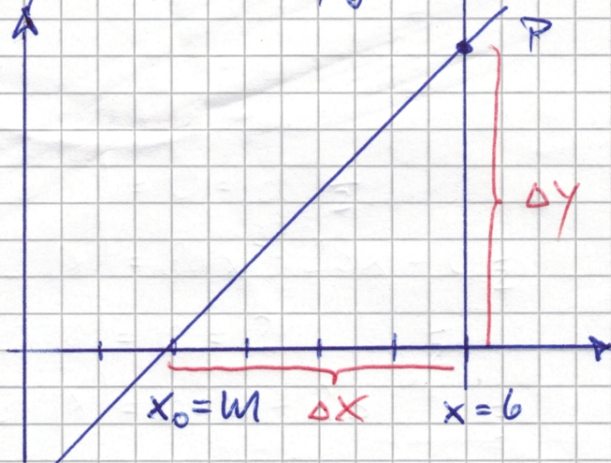
a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 4x^2 + 2x$

(4 $\frac{1}{2}$)

b) $x_1 \approx -0.47$; $x_2 = 0$; $x_3 \approx 8.47$ (mit calc zero) $\checkmark$

c) MAX(5.57/48.84) $\frac{1}{2}$

c) a) $y=0; x=6; g(x)=mx-m^2, 0 < m < 6$



$$g(x) = 0 = mx - m^2 \\ = m(x - m) \\ x = m \quad \frac{1}{2}$$

$$P: m \cdot 6 - m^2 \\ P(6 | 6m - m^2) \quad \frac{1}{2}$$

$$A_D = \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{2} = \frac{(6-m)(6m-m^2)}{2} = \frac{36m - 6m^2 - 6m^2 + m^3}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}m^3 - 6m^2 + 18m \quad \frac{1}{2} \quad \text{mit Progr.}$$

$$A_D'(m) = \frac{3}{2}m^2 - 12m + 18 \stackrel{!}{=} 0 \quad \frac{1}{2} \quad m_1 = 6$$

$$m_2 = 2 \quad \frac{1}{2}$$

b) $A_D''(m) = 3m - 12 \quad \frac{1}{2}$ $A_D''(2) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Max}$ $A_D''(6) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Min} (A=0) \quad \frac{1}{2} \quad 1$

c) $A = \frac{4 \cdot (12-4)}{2} = 16 \quad \frac{1}{2}$

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	tot
3	1	$\frac{1}{2}$	1	2	$\frac{1}{2}$	1	$2\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	13

Integralrechnung

a) $\int_0^1 f(x) dx = 1.25$ (1)

b) $\int_0^1 2\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2 dx = \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}x^3 \right]_0^1$ (1)

$$= \frac{4}{3} - \frac{1}{12} = \frac{5}{4} = 1.25 \quad (0.5)$$

c) Bei $x=4$ hat $f(x)$ eine Nullstelle, danach nur noch negative Werte $\Rightarrow$ Maximaler Wert des Integrals bei $x=4$ (0.5)

$$\int_0^4 f(x) dx = \frac{16}{3} = 5.333 \quad (\text{TR}) \quad (0.5)$$

d) $\int_0^{15} \pi (r(h))^2 dh = 600.830$ (1)
(0.5)

e) Gleichung $500 = \pi \cdot (0.01h^4 - \frac{1}{3}h^3 + 3.2h^2 + \overset{6h_0}{h})$ (1)

$h_0 = 11.380$ mit TR zero oder solver (1)

f) Mit Hauptsatz: $\frac{dV}{dh} = \pi (r(h_0))^2 = 26.006 \frac{\text{cm}^3}{\text{cm}}$ (1) (0.5) (0.5)

Lösungsvorschläge Wahrscheinlichkeit & Kombinatorik / Vorschlag Punkteverteilung

$$1+1+1+1+1,5+2 \cdot 1,5+1,5+2 \cdot 1,5=13P$$

$$1) \binom{5}{2} = \underline{\underline{10}}$$

$$2) 6 \cdot 8 + 5 \cdot 3 = \underline{\underline{63}}$$

$$3) \binom{14}{5} \cdot \binom{9}{5} : 2 = \frac{14!}{5! \cdot 9!} : 2 = \underline{\underline{126 \cdot 126}}$$

$$4) \frac{\binom{5+3}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{56}{364} = \frac{2}{13} \approx \underline{\underline{15,38\%}}$$

$$5) \frac{\binom{5}{2} \binom{3}{1} + \binom{5}{1} \binom{3}{2}}{\binom{5+3}{3}} = \frac{45}{56} \approx \underline{\underline{80,36\%}} \quad \left(\text{od. über } 1 - \frac{\binom{5}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} \right)$$



$$a) \underline{\underline{p(K) = 10\% + (100\% - 95\%) = 15\%}}$$

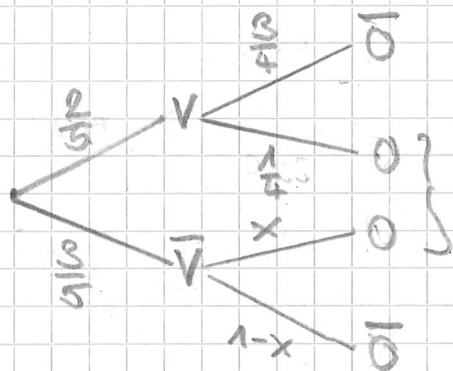
$$b) \underline{\underline{p(G \setminus K) = 40\% - p(K) = 25\%}}$$

15%

7) Entsteine Oliven $\frac{300g}{3g} = 100$; Oliven mit Stein $\frac{300g}{3g+2g} = 60$

$$1 - \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{160 \cdot 159 \cdot 158} = \underline{\underline{75,86\%}}$$

8)



$$b) p(V|O) = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{10} + \frac{3}{20}} = \frac{3}{20} = \underline{\underline{45\%}}$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot x = \frac{1}{3}$$

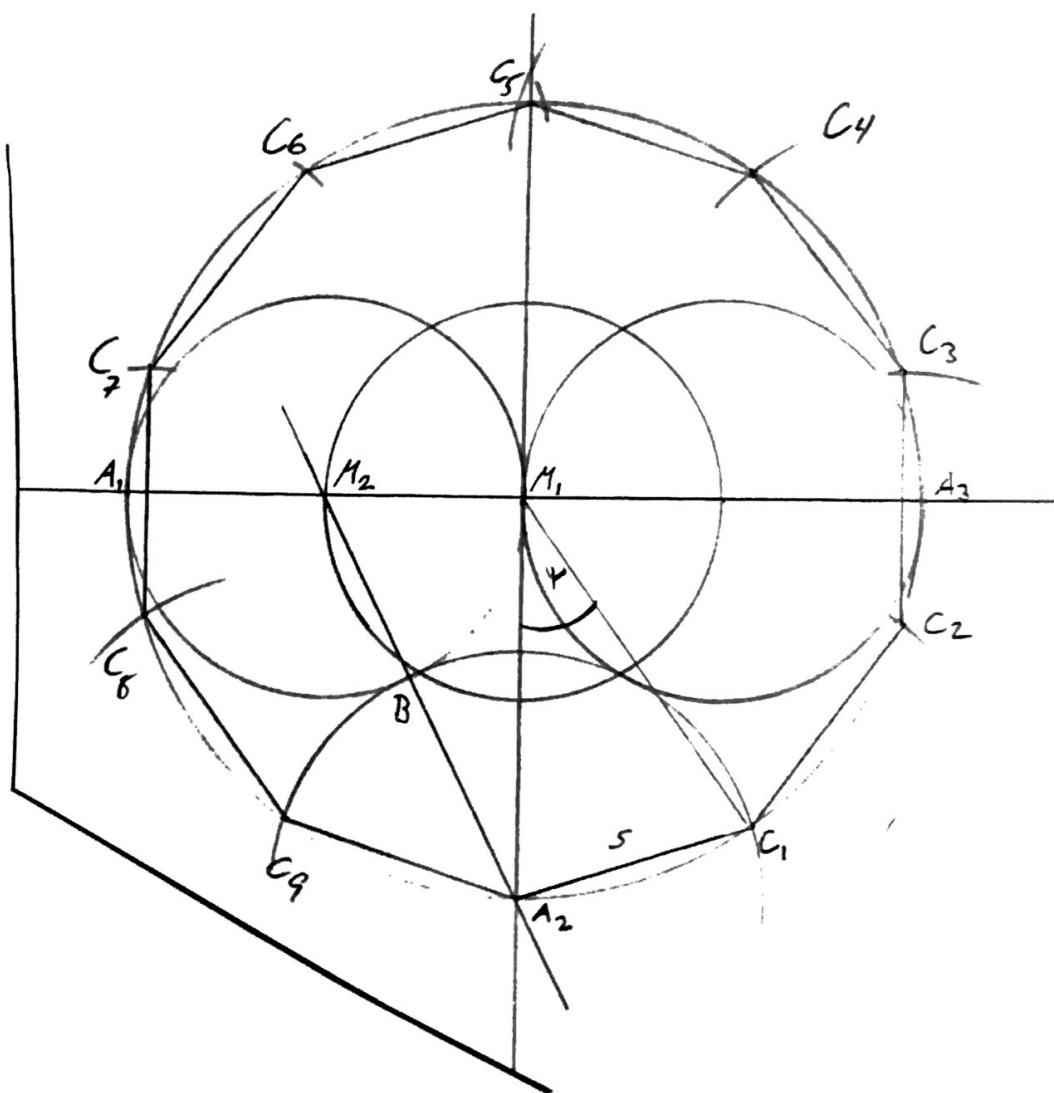
$$\frac{1}{10} + \frac{6}{10}x = \frac{1}{3}$$

$$3 + 18x = 10$$

$$a) p(O|\bar{V}) = x = \frac{7}{18} \approx \underline{\underline{38,89\%}}$$

Aufgabe 6:

Lösungs-
schlüssel.



A: 1 Punkt: M_1, M_2, A_3 oder $A_1, A_2, B, C_1, C_2, \dots, C_9$

1 Punkt: Reihenfolge: $M_1, M_2, A_1, A_2, B, C_1, C_2$

B: 1 Punkt: Pythagoras (s ist Abhängigkeit von r)
 $(s + \frac{r}{2})^2 = (\frac{r}{2})^2 + r^2$; $s = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r$

1 Punkt: Trigonometrie

$$s^2 = r^2 + r^2 - 2rr \cos \psi \quad \text{oder} \quad \sin \frac{\psi}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{r}$$

$$\cos \psi = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \quad \text{oder} \quad \sin \frac{\psi}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

1 Punkt: Verständnis reg. 10-Eck.
 $\psi = \frac{360^\circ}{10}$

1 Punkt: vollst. Lsg.