Name:

Fach	Mathematik
Klassen	6A, 6B, 5Bb, 6I, 6P, 5Qb und 6S
Dauer der Prüfung	240 Minuten
Hilfsmittel	Grafikrechner TI-83/84, Fundamentum, Geodreieck, Zirkel, Schreibzeug.
Note	Das Punktemaximum beträgt 66 Punkte. Die ungerundete Note 6 wird für 55 Punkte erteilt.

Vorbemerkungen

- Die Lösungswege sind nachvollziehbar anzugeben. Ergebnisse ohne Begründung können mit 0 Punkten bewertet werden.
- Lösungen als Dezimalzahlen sind auf 2 Nachkommastellen zu runden.
- Jede Aufgabe muss auf ein separates Blatt gelöst werden. Teilaufgaben sind deutlich zu nummerieren.

Viel Erfolg wünschen Ihnen Christian Boller, Simone Jordan, Helmut Locher, Markus Maurer, Bernhard Pfammatter und Bruno Zurfluh!

1. **Raumgeometrie:** (2+1+1+1+4.5+3.5 = 13 Punkte)

In einer alten Fabrikhalle Länge = 17 m, Breite = 10 m und Höhe = 7 m wird ein neuer Club eingerichtet (siehe Beiblatt, nächste Seite). Als erstes wird ein Lichtspot im Punkt $P(9/1/6)$ montiert. Dieser wird so eingestellt, dass er sein Licht in Richtung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ausstrahlt.

(a) Zeichnen Sie den Punkt P sowie den Lichtstrahl in das Beiblatt ein. Konstruieren Sie den Punkt W, in welchem das Licht auf der Wand auftrifft. Die Konstruktionslinien müssen deutlich erkennbar sein.

(b) Berechnen Sie zur Kontrolle die Koordinaten vom Punkt W.

Nun soll im Raum noch ein dreieckiger Spiegel montiert werden. Die Ecken des Spiegels befinden sich in den Punkten $A(9/13/6)$, $B(0/14/6)$ und $C(3/1/4)$.

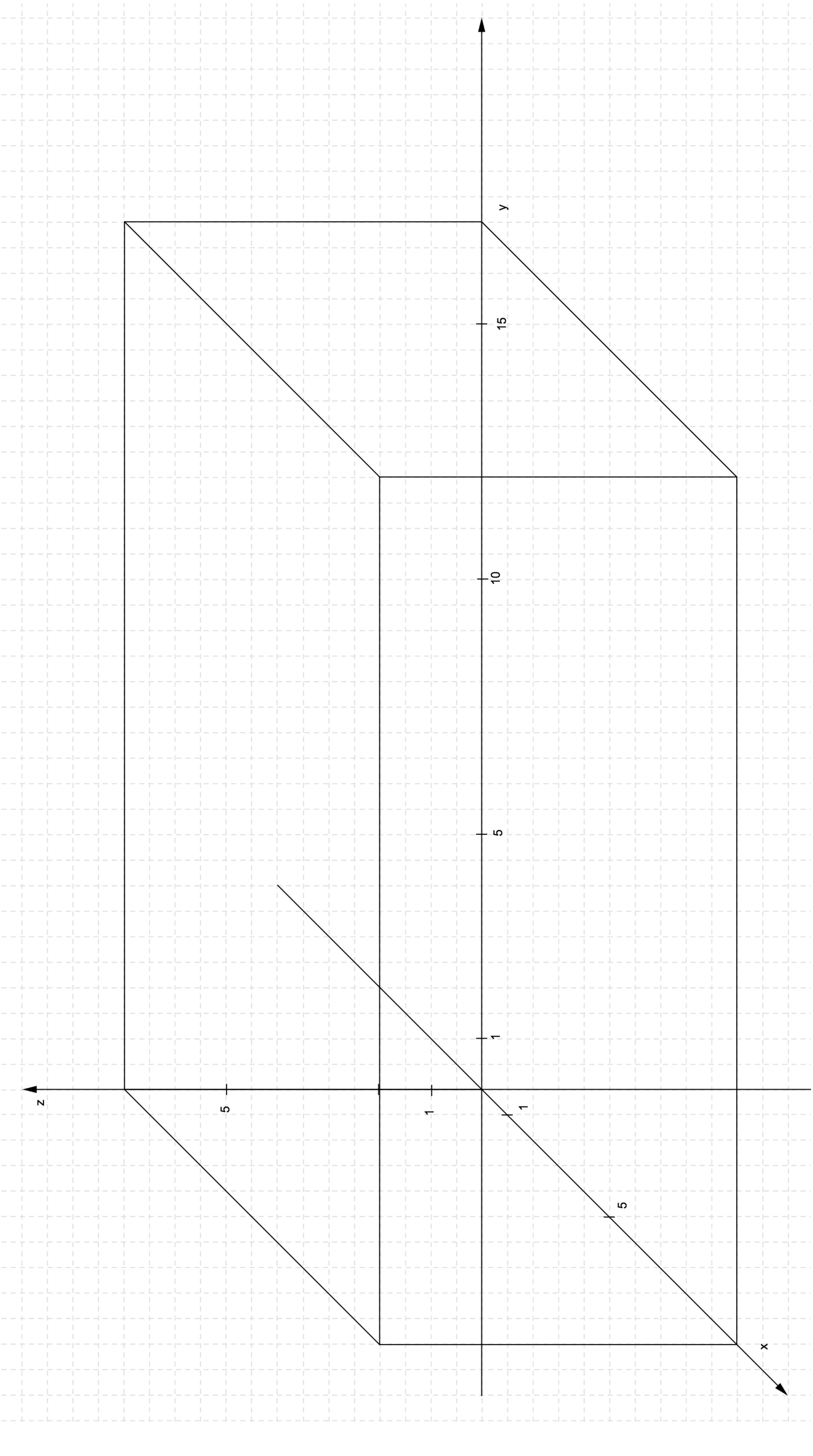
(c) Zeichnen Sie den Spiegel auf dem Beiblatt ein.

(d) Berechnen Sie die Länge der Spiegelkante $\overline{AC}$.

(e) Der Lichtstrahl trifft genau auf die Spiegelkante $\overline{AC}$. Berechnen Sie den Schnittpunkt S und den spitzen Schnittwinkel φ der Spiegelkante mit dem Lichtstrahl.

Als letztes soll eine Discokugel mit dem Mittelpunkt $M(7/16/6)$ und dem Durchmesser 50 cm montiert werden.

(f) Wie gross (in Metern) ist der Abstand der Kugeloberfläche zur Spiegelkante $\overline{AB}$?


y
15
10
5
1
z
5
1
1
5
x

2. **Folgen und Reihen: Vorsicht! Bienen!** (1+1+1+3+3+2= 11 Punkte)

Manche Insekten wie Ameisen oder Bienen bilden Staaten. Wir betrachten das Modell eines Bienenstaates. Dieser Staat besteht aus einer Königin und einer bestimmten Anzahl Arbeiterbienen. Nur die Königin pflanzt sich fort. Aus ihren Eiern schlüpfen jeden Tag 250 junge Arbeiterbienen.

(a) Am Abend des 1. Tages leben 1000 Arbeiterbienen in unserem Modellstaat. Wie viele werden es am Ende des 48. Tages sein?

(b) Nehmen Sie an, die einzelne Biene ist unsterblich. Wenn jede Arbeiterbiene im Tag 5 mg Honig produziert, wie viel Honig wird dann am Ende des 48. Tages von allen Arbeiterbienen produziert worden sein?

Arbeiterbienen altern, weshalb sie nur am ersten Tag 5 mg Honig produzieren können. An jedem folgenden Tag liefern sie 5% weniger ab als am Vortag.

(c) Nehmen Sie an, die einzelne Biene ist unsterblich. Wie viel Honig könnte eine einzelne Biene im Verlaufe ihres Lebens sammeln?

(d) An welchem Tag produziert sie zum ersten Mal weniger als 1 mg Honig? Wie viel Honig wird sie bis dann insgesamt gesammelt haben?

Für die folgenden Aufgaben nehmen wir an, dass zumindest die Königinnen nicht altern, d.h. sie legen ein Leben lang jeden Tag 250 Eier:

Immer wenn ein Staat 10´000 Arbeiterbienen erreicht hat, schlüpfen zwei neue Königinnen und die alte Königin stirbt. Am nächsten Tag teilen sich die beiden jungen Königinnen das Volk gleichmässig auf und jede gründet mit der Hälfte des alten Volkes einen neuen Bienenstaat. Am Ende des ersten Tages ihres Bestehens umfassen die neuen Staaten also 5000 Arbeiterbienen. Am folgenden Tag nehmen die jungen Königinnen ihre Eierproduktion auf.

(e) Wir starten wieder mit einem Volk, welches am Ende des 1. Tages 1000 Arbeiterbienen umfasst. Wann schlüpfen zum ersten Mal zwei neue Königinnen? Wie viele Völker wird es nach 150 Tagen geben?

(f) Wie viele Arbeiterbienen wird es insgesamt nach 150 Tagen geben, wenn keine Arbeiterbiene stirbt?

3. **Differentialrechnung:** (5+3+1+0.5+4.5=14 Punkte)

Die Teilaufgaben A, B und C können unabhängig voneinander gelöst werden.

A. Die Funktion h ist gegeben durch

$$h(x) = 2x^2 - 3x$$

Zeigen Sie auf drei verschiedene Arten, dass die 1. Ableitung von h lautet $h'(x) = 4x - 3$:

i. Durch Bestimmung des Differentialquotienten.

ii. Durch Anwendung der Ableitungsregel von Potenzfunktionen.

iii. Durch Anwendung der Produktregel.

B. Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Sie erfüllt folgende Bedingungen:

- Die Punkte $P(0/0)$ und $Q(2/16)$ liegen auf dem Graphen von f.
- Die Steigung der Tangente in P an f ist 2.
- $f''(0) = 8$

(a) Bestimmen Sie Parameter die a, b, c und d von f

(b) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

(c) In welchem Punkt besitzt die Funktion ein Maximum?

C. Die Schnittpunkte der 3 Geraden

$$y = 0,\ x = 6 \quad \text{und} \quad g(x) = mx - m^2 \quad \text{mit} \quad 0 < m < 6$$

sind die Eckpunkte eines Dreieck.
Bestimmen Sie den Wert m so, dass der Flächeninhalt A des Dreiecks maximal wird und geben sie diesen maximalen Flächeninhalt an.
(Eine vollständige Lösung beinhaltet eine Begründung, dass es sich auch um einen maximalen Flächeninhalt handelt.)

4. **Integralrechnung:** (1+1.5+1+1.5+2+2 = 9 Punkte)

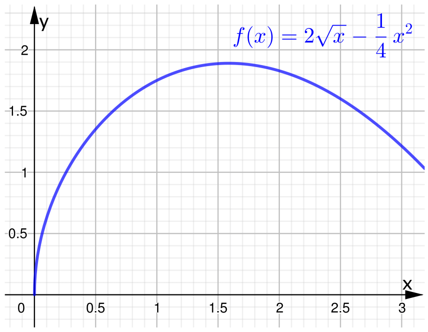
Die Teilaufgaben A und B können unabhängig voneinander gelöst werden.

A. Im Diagramm rechts ist der Graph der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = 2\sqrt{x}$ - $\frac{1}{4}x^2$ gezeichnet.

(a) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ mit dem Taschenrechner.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ ohne Taschenrechner.

(c) Für welchen Wert von b hat das Integral $F(b) = \int_0^b f(x)dx$ den grösstmöglichen positiven Wert? Und wie gross ist dieser Wert $F(b)$?



B. Der Innen-Radius r einer 15 cm hohen, rotationssymmetrischen Vase als Funktion der Höhe h wird beschrieben durch die Funktion

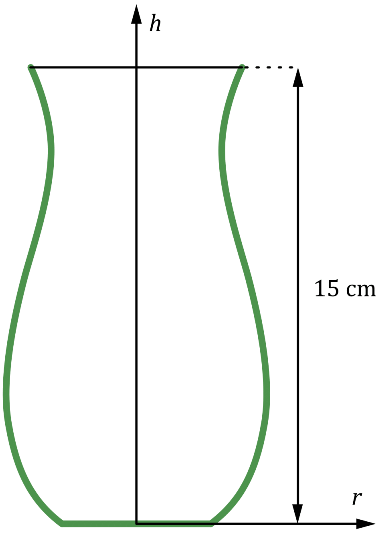
$$r(h) = \sqrt{0.04h^3 - h^2 + 6.4h + 6},$$

wobei r und h in Zentimetern angegeben sind und $0 \leq h \leq 15$ ist.

(a) Berechnen Sie, wie viele Kubikzentimeter Wasser in die Vase passen, wenn sie bis oben gefüllt wird.

(b) Wie hoch ist der Wasserstand z in der Vase (auf 1 mm gerundet), wenn 0.5 Liter Wasser eingefüllt werden.

(c) Wie gross ist die momentane Änderungsrate des Wasservolumens in der Vase bei diesem Wasserstand z?



5. **Wahrscheinlichkeit und Kombinatorik:**(1+1+1+1+1.5+3+1.5+3= 13 Punkte)

Die Pizzeria BellaDonna bietet Pizzen mit einer Auswahl von 14 verschiedenen Belägen aus drei Kategorien an.

Fleisch	Gemüse	Käse
Schinken	Aubergine	Gorgonzola
Salami	Zucchini	Parmesan
Thunfisch	Broccoli	Schafkäse
Meeresfrüchte	Peperoni	
Sardellen	Champignons	
Lachs		

(a) Ein Gast wählt eine Pizza mit ausschliesslich zwei Sorten Gemüse. Wie gross ist seine Auswahl?

(b) Wie gross ist die Auswahl für einen Gast, der ausschliesslich zwei Zutaten aus genau zwei verschiedenen Kategorien wählt?

(c) Der Pizzaiolo möchte drei Pizzen zubereiten und dabei alle 14 Zutaten genau einmal benutzen. Dazu belegt er zwei Pizzen mit fünf und eine Pizza mit vier Zutaten. Auf wie viele Arten kann er dies tun?

(d) Welcher Prozentsatz aller Pizzen mit drei Zutaten ist vegetarisch (kein Fleisch)?

(e) Ein Gast bestellt eine vegetarische Überraschungspizza. Dazu nimmt der Pizzaiolo zufällig drei vegetarische Beläge. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es sowohl Gemüse als auch Käse auf der Pizza?

(f) Fakt ist, dass 10 % aller bestellten Pizzen mit Gemüse und Käse, 40 % mit Gemüse oder Käse und sogar 95 % mit Gemüse oder keinem Käse belegt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bestellt ein Gast eine Pizza

  i. mit Käse?

  ii. mit Gemüse ohne Käse?

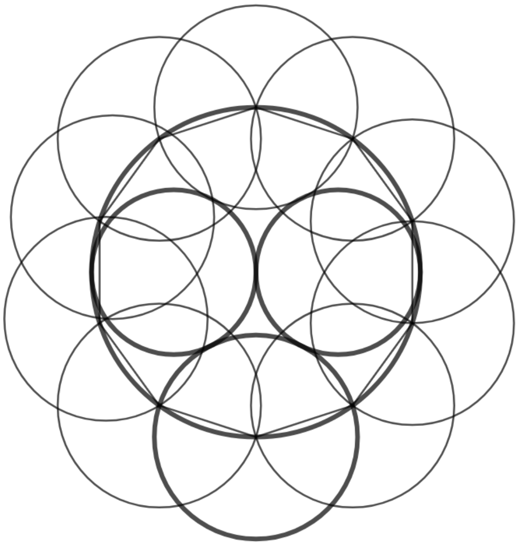
(g) Der Pizzaiolo beauftragt seinen Lehrling 600 g Oliven zu marinieren. Daraufhin leert der Lehrling zwei Gläser Oliven (à je 300 g) in eine Schüssel und vermischt sie mit Chillies, Knoblauch und Olivenöl. Später findet er heraus, dass die Oliven eines Glases nicht entsteint waren. Da die Oliven nun schon vermischt sind, sieht er keine Möglichkeit dieses Missgeschick zu beheben. Er findet aber heraus, dass eine entsteinte Olive drei Gramm und eine mit Stein zwei Gramm mehr wiegt. Der Pizzaiolo verkostet drei Oliven. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bemerkt der Pizzaiolo das Missgeschick seines Lehrlings?

(h) Der eigenwillige Pizzaiolo belegt jede dritte Pizza mit Oliven. Dabei belegt er aber nur ein Viertel aller vegetarischen Pizzen mit Oliven. Durchschnittlich sind 40 % aller Pizzen vegetarisch.

  i. Es wird eine nicht-vegetarische Pizza serviert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat es Oliven drauf?

  ii. Es wird eine Pizza ohne Oliven serviert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie vegetarisch?

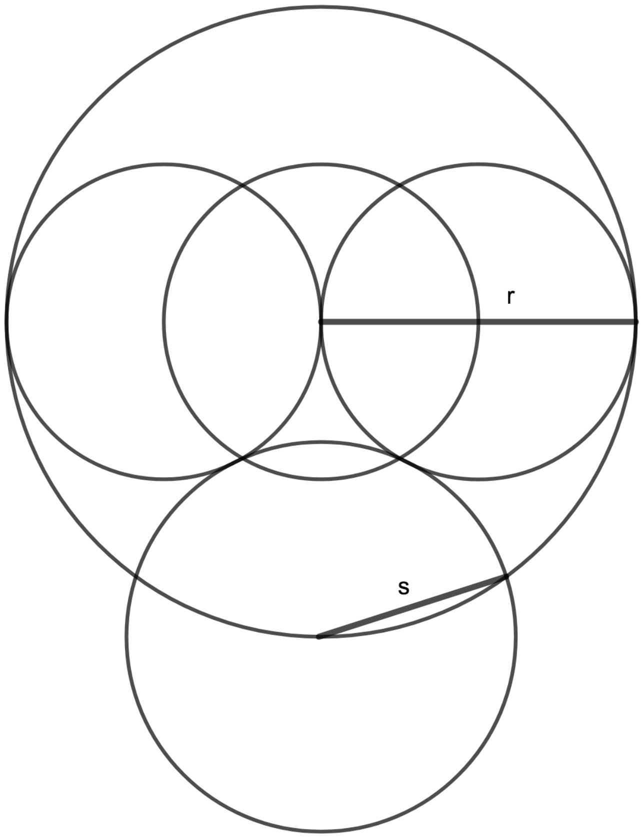
6. **Mathematisches Denken und Arbeiten:** (2+4 = 6 Punkte)
Alex geht zu ihrer Mathematiklehrerin und sagt: "Ich zeichne zwei Kreise *aneinander*. Danach zeichne ich einen grossen Kreis *um sie herum*. Zuletzt zeichne ich einen Kreis, der die zwei kleineren *berührt*. Mit diesem kann ich jetzt ein regelmässiges Zehneck konstruieren. Ist das nicht wunderbar!"



Die Lehrerin staunt und meint, das könne sie fast nicht glauben, aber bevor man darüber urteilen kann, müsse man die Konstruktion mathematisch präzisieren und beweisen.

(a) Zeichnen Sie in das Beiblatt auf der nächsten Seite sämtliche für die Konstruktion nötigen Punkte ein. Ergänzen Sie, falls nötig, die Zeichnung mittels weiterer Geraden oder Kreisen, so dass die Punkte eindeutig definiert sind. Geben Sie eine Reihenfolge an, in der diese Punkte konstruiert werden sollen, so dass ein regelmässiges Zehneck entsteht. (Sie müssen sich nicht an die Reihenfolge von Alex halten!)

(b) Beweisen Sie, dass tatsächlich ein regelmässiges 10-Eck konstruiert wird bzw. dass die Strecke s eine Seite eines regelmässigen Zehnecks ist mit Aussenradius r.


r
s