Mathematik ohne Grenzen 2010/2011
Lösungshinweise zum Probewettbewerb

Aufgabe 1 (7 Punkte): *Farewell*

Wenn von den 40 Kindern, die gerne Theater spielen, jeweils 3 in 13 Zelten untergebracht sind, und das restliche Kind in einem beliebigen Zelt, so ergibt sich nur in 7 Zelten eine Mehrheit für das Singen. Sind dagegen in jedem der 20 Zelte jeweils zwei dieser Kinder untergebracht, so werden sie in allen Zelten überstimmt.

Beim Abschiedsabend werden also mindestens 7 und höchstens 20 Lieder gesungen.

Aufgabe 2 (5 Punkte): *Gut sortiert*

Hier die eindeutige Lösung:

3		4		5		2		1
						∧		
1		2		3		4		5
						∨		∨
2		5		1	<	3		4
								∨
5		3		4		1	<	2
∨								∧
4	>	1		2		5	>	3

Aufgabe 3 (7 Punkte): *Sparmaßnahmen*

Bei den zurückliegenden neun Geburtstagen sind die Kerzen um insgesamt 18 mm kürzer geworden. Die Jahreszahl war also immer zweistellig.

Die 1 kann keine Einerziffer sein, da 0 und 2 nicht benutzt wurden.

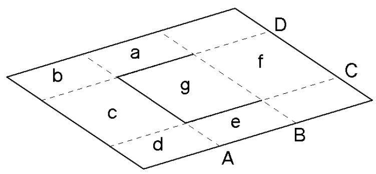
Da die Kerze mit der Null unbenutzt blieb, fand auch kein Zehnerübergang statt. Jede Zehnerziffer muss also mindestens dreimal vorkommen. Daher scheiden 4, 5 und 7 als Zehnerziffern aus, so dass für die Eltern nur die 3 als Zehnerziffer bleibt.

Da die 3 nicht doppelt vorhanden ist, scheidet 33 als Alter für die Eltern aus.

Die Kerzen wurden also an Francos 13., 14. und 15. Geburtstag verwendet, für das Alter der Eltern ergibt sich 34, 35, 36 sowie 35, 36 und 37.

Bei seinem nächsten Geburtstag wird er die Kerzen mit der 1 und der 6 ausblasen.

Aufgabe 4 (5 Punkte): *Drunter und drüber*



- Falte die Teile a,b,c,d,e nach unten längs der Faltlinie B
- Falte nun a und b sowie d und e nach oben, längs der Faltlinien C und D.
- Falte nun b, d und c längs der Faltlinie A so um, dass b auf a und d auf e zu liegen kommt.
- Klappe jetzt c längs der Faltkante B so um, dass c auf dem Handrücken liegt.
- Entfalte schließlich die oben liegenden Teile

Dies ist nicht die einzige Möglichkeit ans Ziel zu kommen. Ein Video mit einer weiteren Lösung findet man bei YouTube: http://www.youtube.com/watch?v=k_6L7kQdLPU

Aufgabe 5 (7 Punkte): *Hmmm!*

Die Lösung lässt sich durch gezieltes Probieren ermitteln.

Ist x die Anzahl der Himbeer- und y die Anzahl der Zitronen-bonbons so gilt:

$$\mathbf{14}x + \mathbf{5}y = \mathbf{500} \text{ und } x + y \text{ ist eine Quadratzahl.}$$

Da x und y positiv und ganzzahlig sind, kommen für x nur Vielfache von 5 in Betracht, was die Anzahl der Möglich-keiten deutlich einschränkt.

Es wurden 20 Himbeer- und 44 Zitronenbonbons gekauft.

x	*y*	*x* + *y* Quadratzahl?
5	86	Nein
10	72	Nein
15	58	Nein
20	**44**	**Ja**
25	30	Nein
30	16	Nein
35	2	Nein

Aufgabe 6 (5 Punkte): *Plus minus 2010*

Ersetzt man einen positiven Summanden x durch seine Gegenzahl, so vermindert sich der Wert der Summe um 2x.

Insgesamt soll der Wert um 3040 kleiner werden. Die Summe der Zahlen, die durch ihre Gegenzahl ersetzt werden, beträgt also 1520.

Um die Zahl der Vorzeichenwechsel zu minimieren, ersetzt man die größten Summanden. Die Summe von 85 bis 100 hat den Wert 1480. Die Hinzunahme der Zahl 40 führt zum gewünschten Ergebnis. Die zu ersetzenden Summanden lassen sich variieren, aber man benötigt in jedem Fall **mindestens 17 Vorzeichenwechsel**.

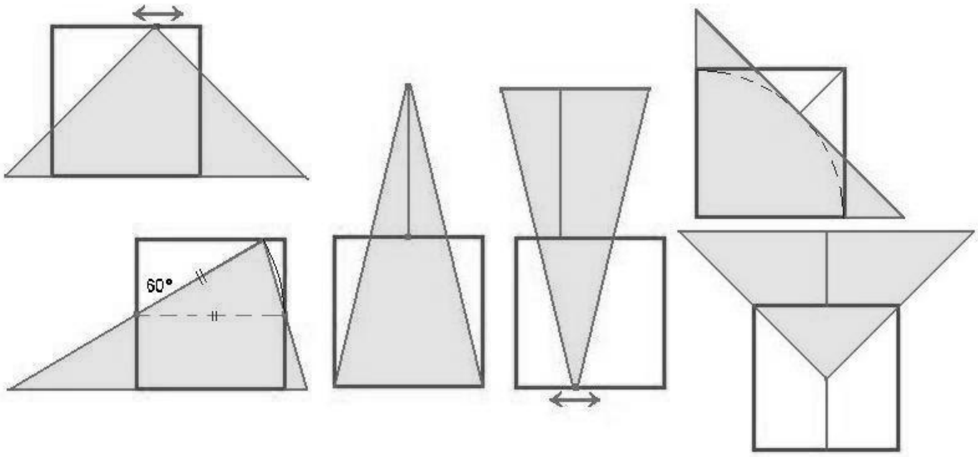
Erweiterung: Bei welchen aufeinander folgenden Summanden kann man das Vorzeichen ändern um 2010 zu erhalten?

Aufgabe 7 (7 Punkte): *Täuschungsmanöver*

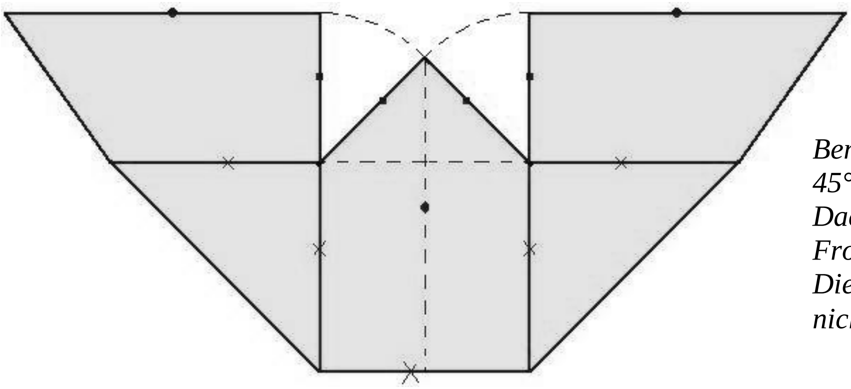
Die Aufschrift von Truhe 1 muss falsch sein, denn sonst müsste diese das Gold enthalten. Dann kann sich der Goldbarren aber weder in Truhe 2 noch in Truhe 3 befinden.
Da nun aber auch die Aufschrift von Truhe 3 falsch ist, enthält **Truhe 3 die Bronze**.
Der Hinweis auf Truhe 4 muss ebenfalls falsch sein, denn sonst würde die Truhe 3 nicht die Bronze sondern den Nickelbarren enthalten.
Der Goldbarren kann also nur noch in Truhe 5 sein. Weil die Aufschrift dieser Truhe nun aber wahr ist, befindet sich das **Platin in Truhe 4**.
Wegen der falschen Aufschrift auf Truhe 2 kann das **Silber** nicht in Truhe 1 sondern nur noch **in Truhe 2** sein. **Also muss Truhe 1 den Nickelbarren enthalten**.

Aufgabe 8 (5 Punkte): *Vom Quadrat zum Dreieck*

Hier 6 mögliche Lösungen für 3 verschiedene gleichschenklige Dreiecke:
Die vierte Lösung ist eine Variante der dritten Lösung. Bei der ersten Lösung kann die Spitze des Dreiecks an verschiedenen Punkten entlang der Quadratseite liegen, im Grenzfall auf einem der Eckpunkte. Dann erhält man aber nur zwei Teildreiecke. Das Zerschneiden eines dieser Teildreiecke zählt nicht als vollwertige Lösung.

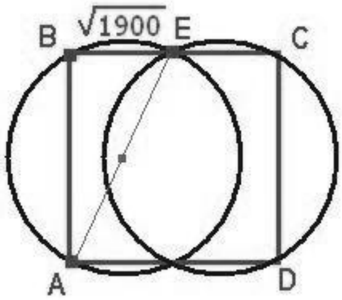


Aufgabe 9 (7 Punkte): *Sitzender Hund*



Bemerkung: Da die Dachneigung 45° beträgt, ist die Firstlänge der Dachgaube gleich der Höhe der Frontseite.
Die nebenstehende Abbildung ist nicht maßstabsgetreu.

<u>Aufgabe 10 (10 Punkte): *Tischlein deck dich*</u>

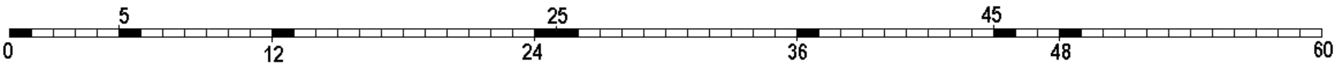


Die vier Ecken des Tisches müssen bedeckt werden, aber eine Tischdecke kann keine gegenüberliegenden Ecken bedecken. Jede Tischdecke muss zwei benachbarte Ecken bedecken.
Die optimale Anordnung ist also folgende:
Die linke Tischdecke berührt A und B und ihr Rand schneidet die Seite [BC] des Quadrats in E.
ABE ist ein rechtwinkliges Dreieck, also sind die Punkte A und E die Enden eines Durchmessers.
Nach dem Satz des Pythagoras gilt: BE = $\sqrt{1900} \approx 43{,}6$ cm < 45 cm.
Man kann den Tisch also nicht komplett bedecken.

<u>Aufgabe 11 (5 Punkte): *Top?*</u>

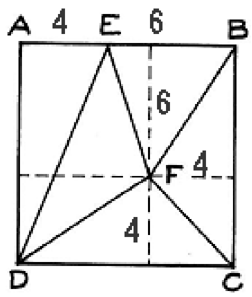
Fasst man alle Steigungen zusammen, so müsste Stefanie mindestens 1600 Höhenmeter überwinden um 2800 m zu erreichen. Sie würde dann nur bergauf laufen und dafür 2h 40 min benötigen. Um wieder auf 1 800 m abzusteigen bräuchte sie 50 min.
Da ihre Laufzeit aber nur 3h 24min betrug, konnte sie die Höhe von 2800 m nicht erreichen.
Eine interessante Erweiterung ist die Frage, welche Höhenunterschiede bergauf und bergab sie in der vorgegebenen Zeit bewältigen konnte. Diese Überlegung führt zu einer maximal erreichbaren Höhe von 2760 m.

<u>Aufgabe 12 (7 Punkte): *Busy*</u>



Auf der abgebildeten Skala sind die Haltezeiten der Busse dunkel und die Wartezeiten hell markiert. Die Wartezeit von Emilie hängt davon ab, zu welchem Zeitpunkt sie im Intervall [0; 60[an der Bushaltestelle ankommt.
Die maximale Wartezeit beträgt 11 Minuten, wenn Emily um hh:13 oder hh:49 an der Haltestelle ankommt, nachdem der Bus gerade abgefahren ist.
Betrachtet man innerhalb der Wartezeiten die Teilintervalle mit einer Wartezeit von mehr als 5 Minuten, so erhält man 5 Teilintervalle von insgesamt 21 Minuten.
Die Wahrscheinlichkeit, dass Emilie mehr als 5 Minuten warten muss beträgt also
$$\boldsymbol{P = \frac{21}{60} = \frac{7}{20} = 0{,}35.}$$

<u>Aufgabe 13 (10 Punkte): *Zu gleichen Teilen*</u>



Der Flächeninhalt des Quadrats beträgt 100 cm².
Jedes Dreieck müsste also einen Flächeninhalt von 20 cm² haben.
Damit AED einen Flächeninhalt von 20 cm² besitzt muss AE= 4 cm sein.
Damit BCF et DCF jeweils einen Flächeninhalt von 20 cm² besitzen muss F einen Abstand von 4 cm zu BC und zu DC haben.
Dann gilt aber für den Flächeninhalt von EBF: $\frac{6 \times 6}{2}$ cm² = 18 cm².
Die vorgeschlagene Teilung ist also nicht möglich.
(Allgemein gilt, dass die Zerlegung eines Quadrats in fünf flächengleiche Dreiecke nicht möglich ist.)