

Mathematik Ohne Grenzen

Wettbewerb vom 22. März 2011



- Für jede Aufgabe, auch für nicht gelöste, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.
- Alle Lösungen müssen erläutert oder begründet werden, mit Ausnahme der Aufgaben 2, 4, 5 und 8.
- Auch Teillösungen werden berücksichtigt.
- Die Sorgfalt der Darstellung wird mitbewertet.

Mathématiques
SANS
Frontières

Aufgabe 1
7 Punkte

Rendez-vous chez Khan

Verfasst den Lösungstext in einer der vier Fremdsprachen im Umfang von mindestens 30 Wörtern.

Marco et Polo doivent parcourir 20 km pour se rendre chez Khan. Ils ont une seule paire de roller à leur disposition.

Ils souhaitent arriver le plus rapidement possible chez leur ami.

A pied, Marco et Polo se déplacent chacun à une vitesse constante de 5 km/h. En roller, chacun se déplace à vitesse constante de 20 km/h.

Heureusement, les deux amis ont la même pointure de chaussures !

Comment devront-ils s'y prendre pour parvenir tous deux chez Khan le plus rapidement possible ?

Combien de temps cela leur prendra-t-il ?

Marco y Polo deben recorrer 20 km para llegar a casa de Khan. Solo tienen un par de patines en línea a su disposición.

Desean llegar lo más rápido posible a casa de su amigo.

A pie, Marco y Polo se desplazan cada uno, a una velocidad constante de 5 km/h. Con patines, cada uno se desplaza a una velocidad constante de 20 km/h.

Afortunadamente los dos amigos tienen la misma talla de zapatos!

¿Cómo tienen que organizarse para llegar los dos a casa de Khan lo más rápido posible?

¿Cuánto tiempo tardarán?

Marco and Polo have to travel 20 km to reach Khan's house. They have just one pair of rollerblades that they can use.

They want to reach their friend's house as quickly as they can.

On foot, Marco and Polo both walk at a constant speed of 5 km/h. On rollerblades they both move at a constant speed of 20 km/h

Fortunately the two friends have the same shoe size!

How should they plan so that they both reach Khan's house as quickly as possible?

How long will that take them?



Marco e Polo devono percorrere 20 km per raggiungere l'amico Khan. Hanno solo un paio di pattini a rotelle.

Sperano di arrivare dal loro amico il più velocemente possibile.

Marco e Polo, a piedi, camminano con una velocità costante di 5 km/h; mentre, con i pattini, si muovono con la velocità costante di 20 km/h.

I due amici, fortunatamente, hanno lo stesso numero di scarpe!

Come devono organizzarsi per raggiungere entrambi Khan al più presto?

Quanto tempo impiegheranno?



Aufgabe 2
5 Punkte

Mal viel, mal wenig

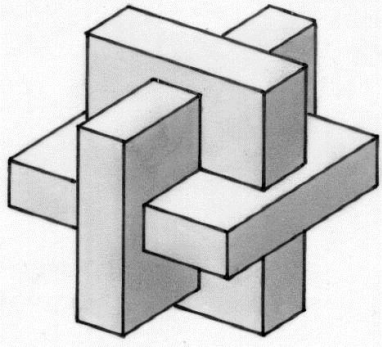
Die sechs Zahlen 1, 4, 7, 5, 2 und 1 sollen in beliebiger Reihenfolge addiert und multipliziert werden, wobei jede der sechs Zahlen genau einmal vorkommen muss. Es dürfen auch Klammern gesetzt werden.

Bestimmt den größten und den kleinsten Wert, den man so erhalten kann.

Gebt für jeden der beiden Werte eure Rechnung an.

Aufgabe 3
7 Punkte *Kopfnuss*

Drei gleiche Quader mit den Kantenlängen 2 cm, 8 cm und 10 cm durchdringen sich so, dass man den abgebildeten Körper erhält.



Berechnet das Volumen dieses Körpers und erklärt eure Rechnung.

Aufgabe 4
5 points *Glückliches Ereignis*

Herr Kreis und Frau Gerade bekommen eine Tochter.

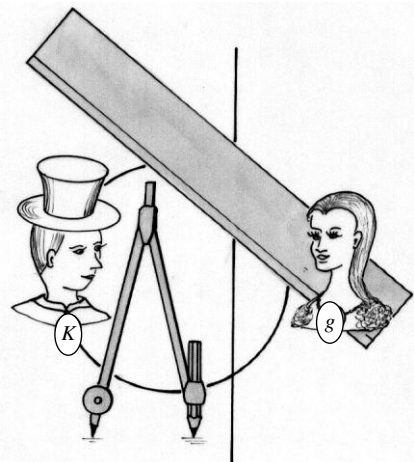
K ist ein Kreis mit dem Radius $r = 4$ cm und dem Mittelpunkt O. Der Punkt A liegt auf der Kreislinie.

Die Gerade g ist die Mittelsenkrechte der Strecke \overline{AO} . Der Punkt P liegt auf der Geraden g.

Für jede Lage von P schneidet die Gerade AP die Kreislinie im Punkt Q. Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke \overline{PQ} .

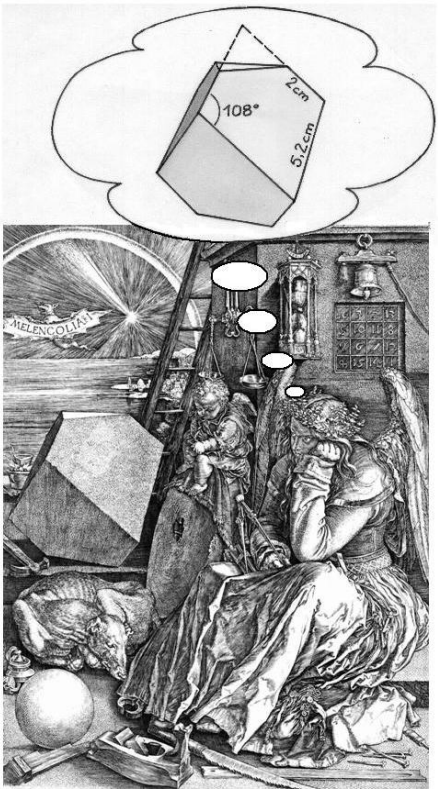
Welche Kurve beschreibt der Punkt M, wenn der Punkt P sich auf der Geraden g bewegt?

Zeichnet so viele Positionen von P, Q und M ein, bis man die Form der gesuchten Kurve erkennen kann.



Aufgabe 5
7 Punkte *Dürers Polyeder*

Auf dem Kupferstich „Melencolia“ (1514) von Albrecht Dürer findet man verschiedene mathematische Symbole und Objekte. Der Engel betrachtet nachdenklich eine Fläche des Polyeders. Er versteht, dass es sich um eine Raute handelt, von der man eine Ecke abgeschnitten hat.



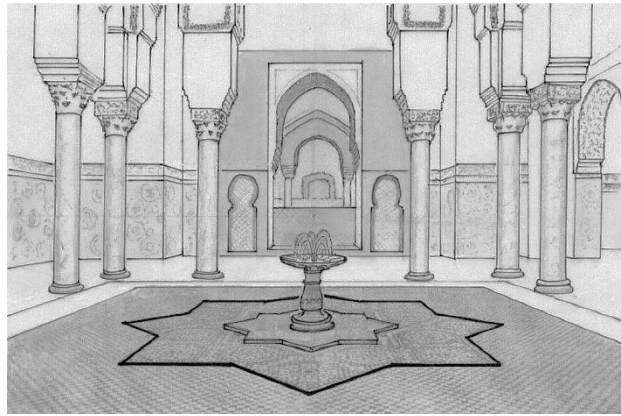
Zeichnet diese Fläche mit den angegebenen Maßen (5,2 cm, 108°, 2 cm) auf euer Antwortblatt.

Ergänzt diese Figur zu einem Netz des Polyeders.

Beachtet, dass dieses Netz zwei kongruente gleichseitige Dreiecke enthält und dass auch die übrigen Flächen zueinander deckungsgleich sind.

Aufgabe 6
5 Punkte *Schnittmuster*

Bei der Besichtigung eines prächtigen Palastes in Marokko erklärte meine Touristenführerin, es sei einfach, die Form des Bodenmosaiks zu erhalten.



- Nimm ein quadratisches Blatt Papier mit dem Diagonalschnittpunkt O.
- Falte es längs einer Diagonalen übereinander, so dass du ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck erhältst. Dieses faltest du noch zweimal übereinander, so dass sich jedes Mal wieder ein gleichschenkelig rechtwinkliges Dreieck ergibt.
- Den Eckpunkt gegenüber der Hypotenuse des letzten Dreiecks nennst du A. Der Punkt B liegt auf der Hypotenuse dieses Dreiecks und es gilt $\overline{OA} = \overline{OB}$.
- Zeichne nun zwei sich schneidende Strecken so ein, dass zwei gleichschenkelig rechtwinklige Dreiecke mit den Hypotenusen \overline{OA} und \overline{OB} entstehen.
- Jetzt erkennst du ein Trapez, das du abschneidest.
- Falte die Figur auf – und siehe da!

Klebt die erhaltene Figur auf das Antwortblatt und erklärt, warum man an den Zackenspitzen rechte Winkel erhält.

Aufgabe 7
7 Punkte

Über die Linie

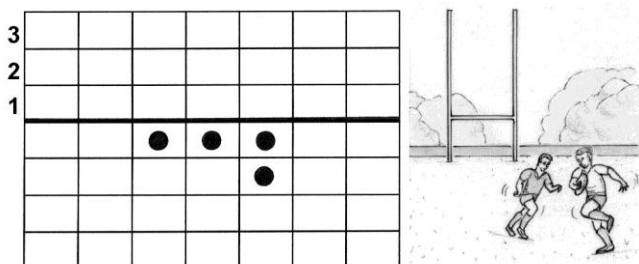
Auf kariertem Papier zeichnet man eine dicke horizontale Linie ein.

In die Felder unterhalb dieser Linie werden eine gewisse Anzahl Spielfiguren gesetzt (eine Figur pro Feld).

Danach sind nur folgende Züge erlaubt:

Wenn sich direkt links, rechts oder oberhalb einer Spielfigur eine weitere Spielfigur befindet, hinter der ein freies Feld ist, so darf diese übersprungen und das freie Feld besetzt werden. Die übersprungene Spielfigur muss dann entfernt werden.

Ziel des Spiels ist es, so hoch wie möglich über die dicke horizontale Linie zu gelangen.



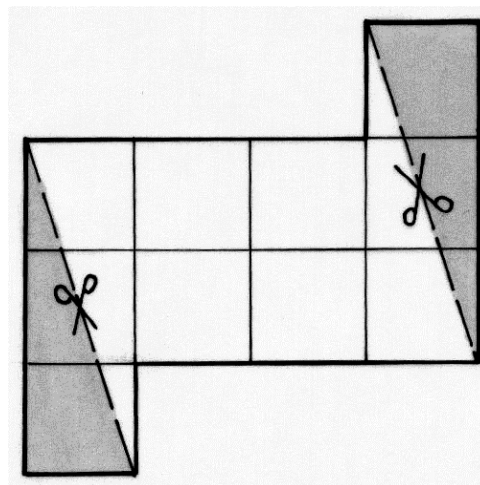
Zeigt, dass man mit der abgebildeten Anordnung von vier Spielfiguren in die zweite Reihe gelangen kann.

Zeichnet nun eine Anordnung von möglichst wenigen Spielfiguren, bei der man die dritte Reihe erreichen kann. Stellt eure Züge jeweils dar.

Aufgabe 8
5 Punkte

Drei zum Quadrat

Nathalie hat eine Figur aus 10 Einheitsquadraten mit der Seitenlänge 1 cm gezeichnet. Diese Figur zerschneidet sie durch zwei gerade Schnitte in drei Teile (s. Abbildung). Sie ordnet die Teilstücke neu an und erhält so ein Quadrat mit demselben Flächeninhalt wie die Ausgangsfigur.



Klebt Nathalies Quadrat auf das Antwortblatt.

Versucht nun dasselbe mit einer Figur aus 29 Einheitsquadraten. Zeichnet diese Ausgangsfigur auf euer Antwortblatt und markiert die beiden geraden Schnittlinien.

Aufgabe 9
7 Punkte

2010 nach 2010

Eine Folge natürlicher Zahlen beginnt mit der Zahl 2010. Die nächste Zahl erhält man, wenn man die Ziffern ihres Vorgängers quadriert und die Ergebnisse addiert.

Der Nachfolger von 2010 ist also $2^2 + 0^2 + 1^2 + 0^2 = 5$. Die dritte Zahl dieser Folge ist $5^2 = 25$, die vierte 29 und so fort.



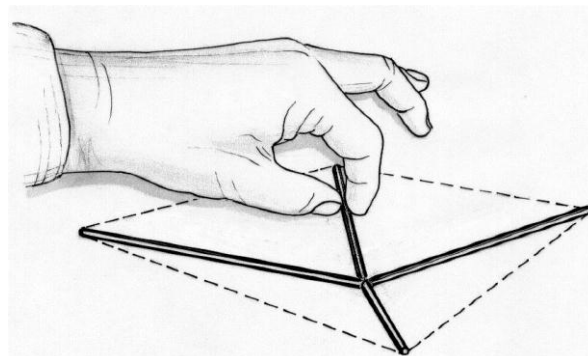
Wie heißt die 2011te Zahl dieser Folge? Begründet eure Antwort.

Aufgabe 10
10 Punkte

Pastageometrie

Vier rohe Spaghetti mit der Länge 3 cm, 5 cm, 11 cm und 13 cm werden sternförmig auf den Tisch gelegt, so dass sich vier ihrer Enden im Zentrum des Sterns berühren.

Die vier anderen Enden der Spaghetti bilden die Eckpunkte eines Vierecks.



Wie muss der Stern aussehen, wenn dieses Viereck einen möglichst großen Flächeninhalt haben soll? Begründet eure Antwort.

Klassenstufe 11

Aufgabe 11
5 Punkte

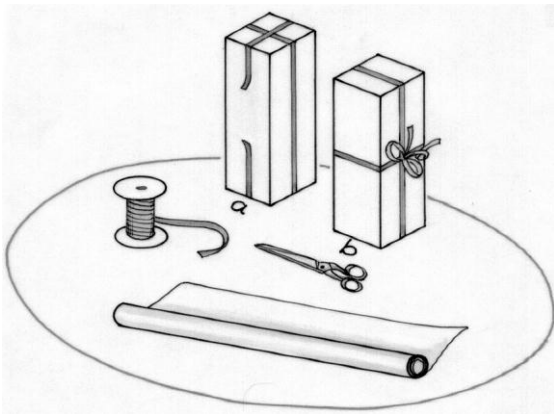
Verschnürt

Mein Paket hat die Form eines Quaders mit quadratischer Grundfläche. Es soll mit einem hübschen Geschenkband verziert werden.

Mein Band ist 1,50 m lang. Wenn ich das Paket wie auf der Abbildung verschnüre, fehlen im Fall (a) noch 10 cm zwischen den Enden. Im Fall (b) bleiben zu meinem Erstaunen 30 cm übrig, sodass es noch für eine schöne Schleife reicht.

Welchen Rauminhalt hat mein Paket?

Begründet eure Antwort.



Aufgabe 12
7 Punkte

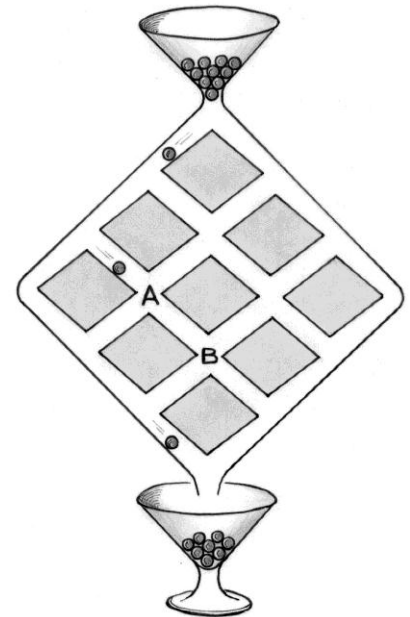
Kugelbahn

Bei der rechts abgebildeten Kugelbahn rollen Kugeln aus dem oberen Vorratsbehälter nach unten und landen schließlich im unteren Behälter. An jeder Gabelung rollt die Kugel mit der gleichen Wahrscheinlichkeit nach links oder nach rechts unten.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel auf ihrem Weg die Gabelung A erreicht?

Mit welcher Wahrscheinlichkeit passiert eine Kugel die Gabelung B?

Begründet jeweils eure Antwort.



Mathématiques
SANS
Frontières

Aufgabe 13
10 Punkte

Zug um Zug

Auf einer Hochgeschwindigkeitsstrecke fahren alle Züge mit einer Geschwindigkeit von 300 km/h. Albert bemerkt bei seiner Fahrt, dass im Abstand von jeweils 5 Minuten ein anderer Zug entgegen kommt. Alberts Zug verlangsamt seine Fahrt und fährt mit einer niedrigeren, aber konstanten Geschwindigkeit weiter. Nun begegnen ihm die entgegenkommenden Züge, deren Geschwindigkeit sich nicht geändert hat, im Abstand von genau sechs Minuten.

Wie schnell fährt Alberts Zug, nachdem er seine Fahrt verlangsamt hat? Begründet.

