Mathematatik ohne Grenzen 2010/2011

Lösungshinweise zum Hauptwettbewerb am 22. März 2011

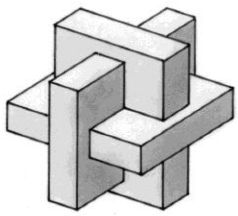
Aufgabe 1: Rendez-vous chez Khan (7 Punkte)

Wenn beide möglichst schnell ankommen wollen, geht das nur, wenn jeder so weit wie möglich die Rollschuhe benutzt. Da sie zu zweit sind, muss jeder die eine Hälfte der Strecke mit Rollschuhen und die andere zu Fuß zurücklegen. Am schnellsten kommen sie voran, wenn Sie sich nur einmal abwechseln.
Beide starten gemeinsam. Der Erste fährt voraus, legt seine Rollschuhe nach 10 km ab und geht sofort zu Fuß weiter. Der zweite zieht sich, sobald er ankommt, die Rollschuhe an und holt seinen Freund am Ziel ein.
Die Streckenabschnitte von 10 km legen sie zu Fuß in 2 Stunden und mit Rollschuhen in 30 Minuten zurück, so dass sie mit der Zeit zum Wechseln der Rollschuhe etwas mehr als 2,5 Stunden unterwegs sind.

Aufgabe 2: Mal viel, mal wenig (5 Punkte)

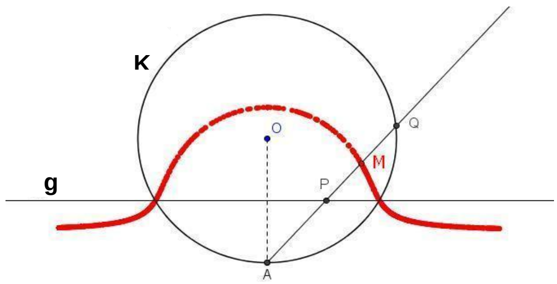
Die kleinste Zahl ist $1\cdot2+1\cdot4+5+7=$ **18**, die größte ist $(1+1)\cdot2\cdot4\cdot5\cdot7=$ **560**.
Beide Werte können auch durch andere Terme erreicht werden.

Aufgabe 3: Kopfnuss (7 Punkte)



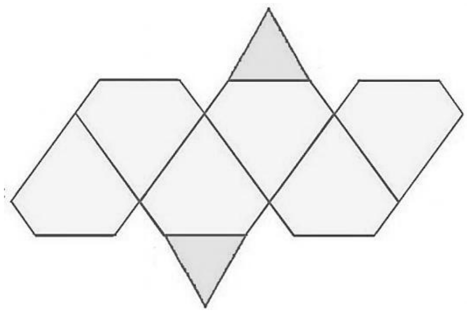
Die drei Quader haben zusammen einen Rauminhalt von 480 cm³. Dort wo sich zwei Quader überschneiden wurden die Rauminhalte doppelt gezählt. Dies ist bei insgesamt sechs Teilkörpern mit einem Rauminhalt von jeweils $2\cdot2\cdot3$ cm³ = 12 cm³ der Fall.
Im Zentrum des Körpers überschneiden sich alle drei Quader. Dieser Bereich wurde dreifach gezählt. Er hat die Form eines Würfels mit dem Rauminhalt 2^3 cm³ = 8 cm³.
Für das Volumen des Körpers erhält man nach Abzug der Überschneidungen
$V = 480\text{ cm}^3 - 6\cdot12\text{ cm}^3 - 2\cdot8\text{ cm}^3 = 392\text{ cm}^3$

Aufgabe 4: Glückliches Ereignis (5 Punkte)



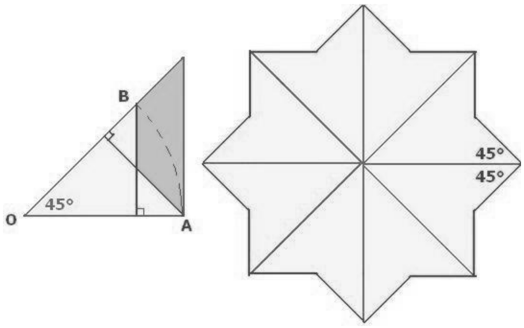
Die Ortslinie des Punktes M ist symmetrisch zur Geraden OA und geht durch die Schnittpunkte von Kreis und Gerade. Wenn P außerhalb des Kreises liegt flacht die Kurve umso mehr ab, je weiter P von der Kreislinie entfernt ist. Diese Eigenschaften sollen in der Zeichnung erkennbar sein.
Die Ortslinie nähert sich asymptotisch einer Parallelen zu g durch A.

Aufgabe 5: Dürers Polyeder (7 Punkte)



Hier ein mögliches Netz. Man beachte, dass die Dreiecke gleichseitig sind und mit den Seiten der Nachbarflächen keinen gestreckten Winkel bilden.

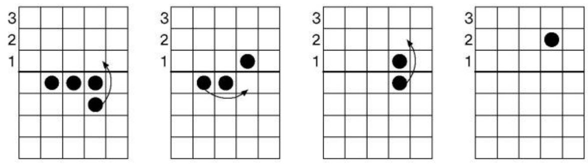
Aufgabe 6: Schnittmuster (5 Punkte)

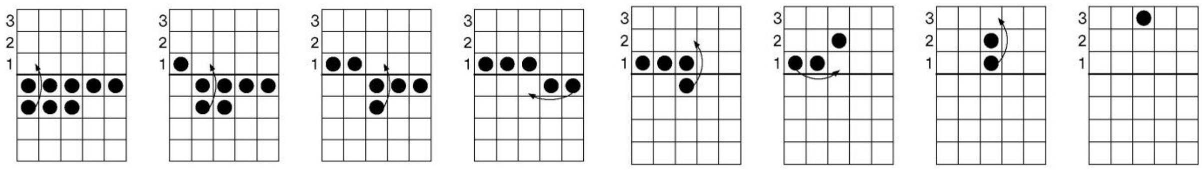


Die linke Figur zeigt das gefaltete Papier mit dem grauen Trapez, welches ausgeschnitten werden muss.
Nach dreimaligem Falten erhält man bei O einen Winkel von 45°.
Da die rechtwinkligen Dreiecke mit den Hypotenusen OA und OB gleichschenklig sind, ergeben sich bei A und B ebenfalls Winkel von 45°.
Beim Auseinanderfalten werden OA und OB zu Symmetrieachsen der Figur, weshalb die Winkelweite an den Zackenspitzen 2·45° beträgt.

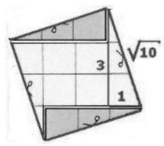
Aufgabe 7: Über die Linie (7 Punkte)

Rechts eine Zugfolge, mit der man in die zweite Reihe gelangt.
Um die dritte Reihe zu erreichen, benötigt man mindestens acht Spielfiguren. Die Abbildungen unten zeigen eine mögliche Folge von Spielzügen.

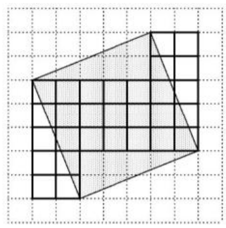




Aufgabe 8: Drei zum Quadrat (5 Punkte)



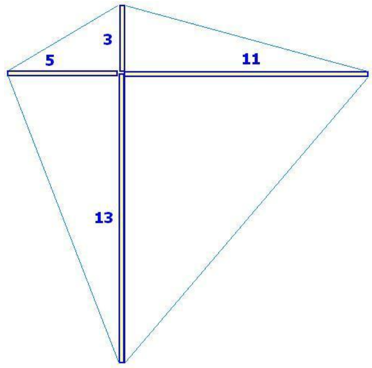
Die gegebene Figur hat einen Flächeninhalt von 10 cm². Die Seitenlänge des zugehörigen Quadrats beträgt a = $\sqrt{10}$ cm. Man erhält diese Strecke als Diagonale eines Rechtecks mit den Seitenlängen 1 cm und 3 cm.
Die zweite Figur hat einen Flächeninhalt von 29 cm². Die Seitenlänge des Quadrats ist also $\sqrt{29}$ cm. Sie ergibt sich aus der Diagonalen eines Rechtecks mit den Seitenlängen 2 cm und 5 cm. (siehe Abb.).



Aufgabe 9: 2010 nach 2010 (7 Punkte)

Um eine Regelmäßigkeit zu erkennen, muss man so viele Folgenglieder berechnen, bis sich eine Zahl wiederholt. Da das nächste Folgenglied aus den Ziffern des vorhergehenden gebildet wird, ist die Folge ab dieser Stelle periodisch.
Man erhält 2010; 5; 25; 29; 85; 89; 145; 42; 20; 4; 16; 37; 58; 89; … und erkennt, dass das 6. und das 14. Folgenglied übereinstimmen. Daraus ergibt sich ab dem 7. Folgenglied eine Periodenlänge von 8 Folgengliedern.
Die Anzahl der Perioden von 7 bis 2011 beträgt 250. Das letzte Folgenglied vor dem 2011. mit dem Wert 89 hat also die Nummer 6 + 250·8 = 2006. Durch Abzählen der weiteren Folgenglieder gelangt man zum 2011. Folgenglied mit dem Wert 16.

Aufgabe 10: Pastageometrie (10 Punkte)



Durch die Spaghetti wird das Viereck in 4 Dreiecke zerlegt.
Der Inhalt dieser Dreiecke ist jeweils maximal, wenn die Spaghetti zueinander orthogonal sind. Die Spaghetti sind also orthogonale Diagonalen des Vierecks.
Für die Länge der Diagonalen gibt es drei mögliche Paarungen, nämlich (13+3/11+5), (13+11/5+3) und (13+5/11+3).
Aus der ersten Paarung (siehe Abb.) ergibt sich ein Flächeninhalt von 128 cm², aus den beiden anderen ein Flächeninhalt von 96 cm² und 126 cm².
Die abgebildete Anordnung ergibt also das Viereck mit dem größten Flächeninhalt.

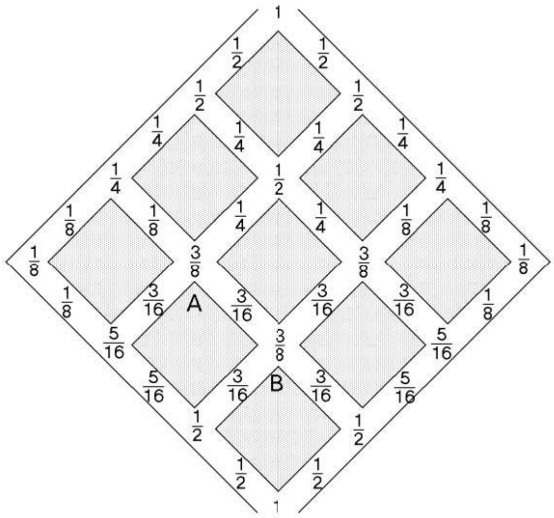
Aufgabe 11: Verschnürt (5 Punkte)

Sei x die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche und y die Höhe des Pakets. Dann gilt

$$4x + 4y - 10 = 150$$
$$6x + 2y + 30 = 150$$

Als Lösung erhält man $x = 10$ und $y = 30$.
Das Paket hat einen Rauminhalt von 10·10·30 cm³ =3000 cm³.

Aufgabe 12: Kugelbahn (7 Punkte)



Um nach A zu gelangen muss eine Kugel zweimal nach links und einmal nach rechts rollen. Dies ist auf drei Arten möglich (rll, lrl und llr). Die Wahrscheinlichkeit nach A zu gelangen ist $3 \cdot 0{,}5^3 = 0{,}375$.
Um nach B zu kommen muss eine Kugel zweimal nach rechts und zweimal nach links rollen. Daraus ergeben sich sechs unterschiedliche Wege (rrll, lrrl, llrr, lrlr, rlrl und rllr). Die Wahrscheinlichkeit nach B zu kommen ist $6 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}375$. Sie stimmt mit der für A überein.

In der Abbildung sind für jedes Teilstück und jede Verzweigung die Wahrscheinlichkeiten für die Passage einer Kugel eingetragen.

Aufgabe 13: Zug um Zug (10 Punkte)

Aus der Sicht von Albert begegnen ihm die Züge mit einer Geschwindigkeit von 600 km/h = 10 km/min, da Albert ihnen mit gleicher Geschwindigkeit entgegenfährt.
Für den Abstand d der entgegen kommenden Züge gilt d = 10 km/min · 5min = 50 km.
Da sich der Abstand dieser Züge nicht ändert, wenn Albert langsamer fährt, gilt weiter

$$(v_A + 10 \text{ km/min}) \cdot 6 \text{ min} = 50 \text{ km bzw.}$$
$$(v_A + 300 \text{ km/h}) \cdot 0{,}1 \text{ h} = 50 \text{ km}$$

Daraus folgt $v_A = 200$ km/h.