Lösungshinweise für den Probewettbewerb 2011/12

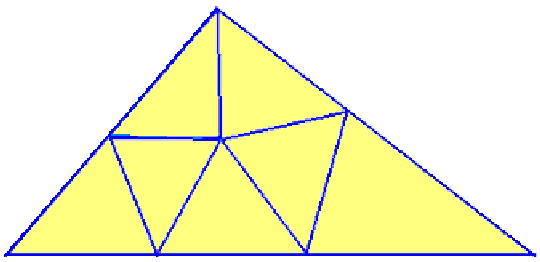
<u>Aufgabe 1 :</u>

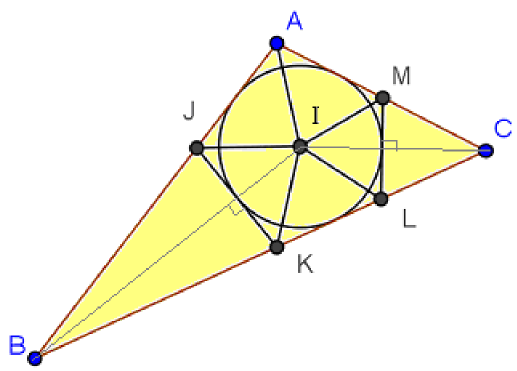
4 + (3 – 1) = 6.

Der Burgwächter zündet sofort alle drei Kerzen an. Eine Stunde später erlischt die kleine Kerze. Er löscht die mittlere Kerze, bei der noch für 2 Stunden Wachs übrigbleibt. Wenn die große Kerze nach 4 Stunden Brenndauer erlischt, zündet er erneut die mittlere Kerze an. Wenn diese Kerze 2 Stunden später abgebrannt ist, öffnet er die Tore der Burg.

<u>Aufgabe 2 :</u>

Links ein Dreieck mit einem stumpfen Winkel, das in 7 Dreiecke mit nur spitzen Winkeln zerlegt wurde :

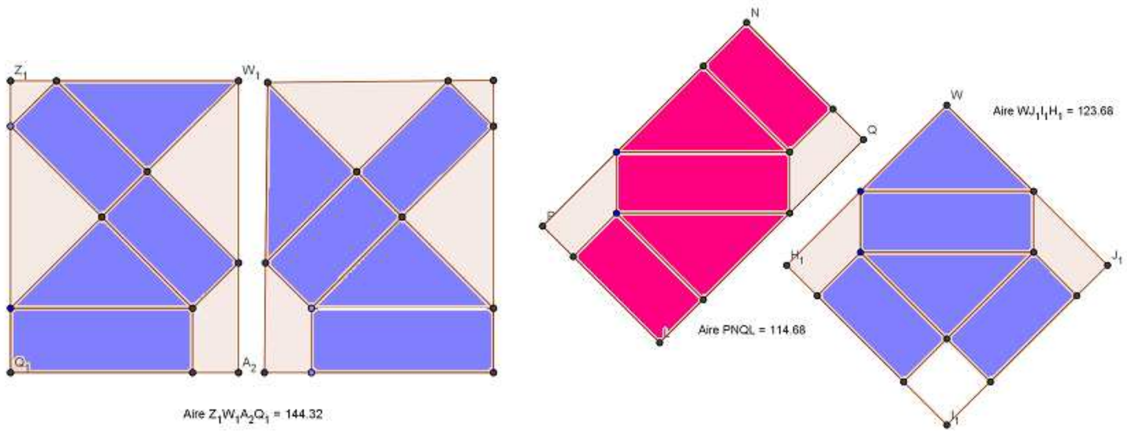




Die rechte Konstruktion mit Tangenten an den Inkreis des Dreiecks ABC zeigt, dass eine solche Unterteilung immer möglich ist (nicht verlangter Beweis).

<u>Aufgabe 3 :</u>

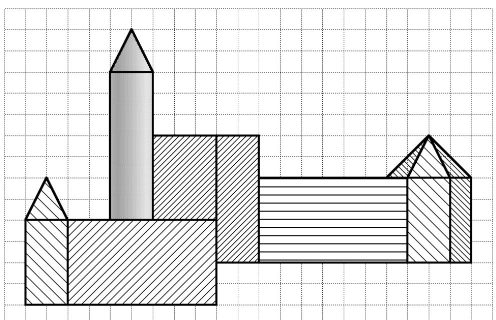
Hier einige Beispiele von Netzen des Prismas mit einbeschriebenem Rechteck :



Das optimale Netz ist das dritte von links. Um die Flächeninhalte zu vergleichen, muss man diese nicht berechnen, es reicht den „Verschnitt“ zu vergleichen.

<u>Aufgabe 4 :</u>

Ansicht von Norden:



Aufgabe 5:

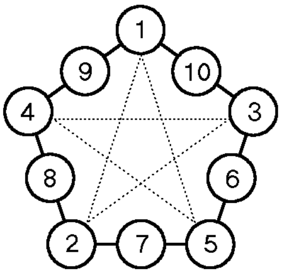
Hier die Liste mit den Beträgen unter 30 S̶, die man passend bezahlen kann:

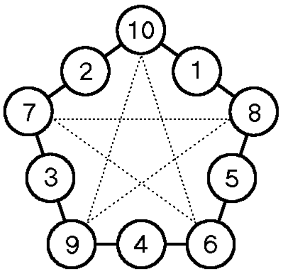
Betrag	**5**	**7**	**10**	**12**	**14**	**15**	**17**	**19**	**20**
Bezahlung	5	7	5+5	5+7	2×7	3×5	10+7	12+7	4×5
Betrag	**21**	**22**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Bezahlung	3×7	17+5	19+5	5×5	19+7	22+5	4×7	22+7	6×5

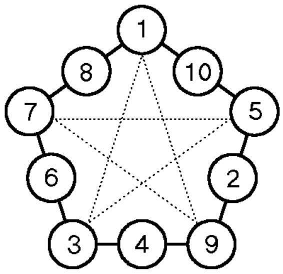
Von 26 S̶ bis 30 S̶, hat man fünf aufeinanderfolgende Beträge, die man passend bezahlen kann. Addiert man zu diesen fünf Beträgen jeweils 5 S̶ oder ein Vielfaches davon, lassen sich alle Beträge über 30 S̶ erzeugen.

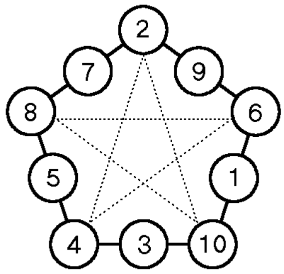
Aufgabe 6:

Hier vier Lösungen, jede hat noch 10 Varianten aufgrund von Rotation oder Symmetrie.









Nur eine Lösung wird verlangt.

Aufgabe 7:

Es gibt 5 Lösungen: 48+48+84; 60+60+60; 81+81+18; 86+86+8 und 88+88+4.

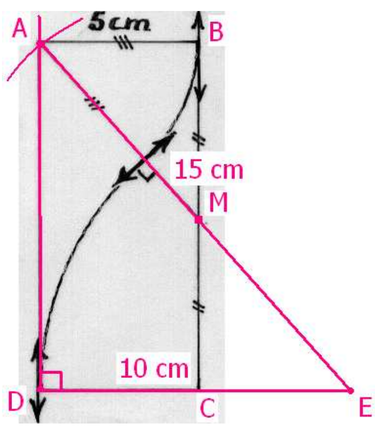
Aufgabe 8:

Sei n die Anzahl der Legionäre. Da bei jeder genannten Aufstellung 3 Soldaten übrig bleiben, muss n-3 durch 4, 5 und 7 teilbar sein. Das Produkt der drei Zahlen ist die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft. Also ist $4\cdot 5\cdot 7 + 3 = 143$ die kleinstmögliche Anzahl der Soldaten.
Mit $143 = 11\cdot 13$ sind zwei Rechtecksformationen möglich.

Aufgabe 9:

Die Abmessungen sind eine Folge von Fibonacci-Zahlen: 2×3 ; 3×5 ; 5×8 usw.
Am Ende des 13. Tages hat das Rechteck die Breite 987 mm und die Länge 1597 mm. Sein Flächeninhalt übertrifft erstmals $1{,}5\cdot 10^6$ mm² = 1,5 m².
(Als Antwort ist auch der Beginn des 14. Tages richtig.)

Aufgabe 10:

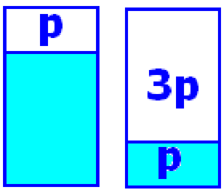


Die Kurve, die von B nach D verläuft, besteht aus zwei Kreisbögen. Am Verlauf der Tangenten und an den Streckenmarkierungen erkennt man, dass der Radius des kleinen Kreisbogens 5 cm beträgt und sein Mittelpunkt A ist. Der Mittelpunkt des großen Kreisbogens liegt auf der Verlängerung der Seite DC. Den Streckenmarkierungen auf der Seite BC entnimmt man, dass M der Mittelpunkt von BC ist. Aus den Strahlensätzen (oder aus der Punktsymmetrie) folgt, dass AB und CE gleich lang sind. Also ist DE, und damit auch der Radius des großen Kreisbogens, 10 cm lang. Für die Strecke AE ergibt sich aus der Summe der beiden Radien eine Länge von 15 cm.
Mit diesen Angaben konstruiert man das Dreieck ADE, dann das Rechteck ABCD und schließlich die beiden Kreisbögen.

Aufgabe 11:

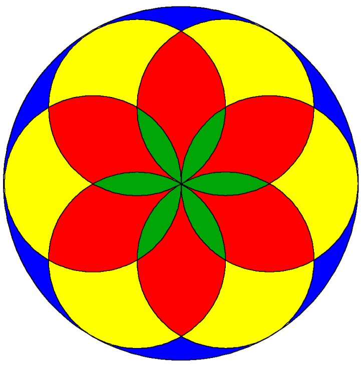
Wenn Leas Chancen 2:3 stehen, wird bei vier der sechs Augenzahlen ihr Heft eingesammelt. Leas Nummer muss also vier dieser Augenzahlen als Teiler besitzen. Durch Nachprüfen stellt man fest, dass von den 27 Nummern nur drei diese Eigenschaft besitzen, nämlich 6, 18 und 20.

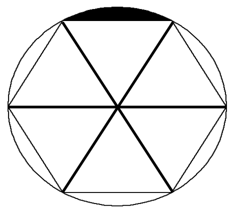
Aufgabe12:



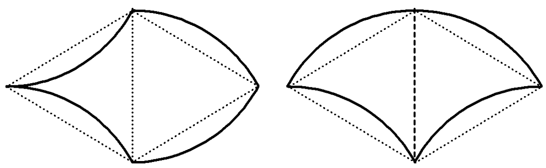
Sei ***p*** der Anteil der Ladung, den Harold verbraucht hat. In der gleichen Zeit verbraucht Maud den Anteil ***3p***.
Sie werden Ihre Akkus tauschen, wenn ***p = 100% – 3p*** gilt.
Daraus folgt ***p = 25%***. Wenn beide Geräte durchgehend eingeschaltet bleiben, müssen Harold und Maud ihre Akkus nach drei Stunden, um 12 Uhr, tauschen.
Beide Geräte können dann sechs Stunden lang betrieben werden.

Aufgabe 13:

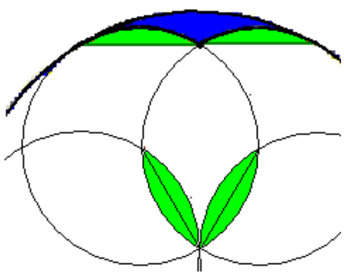




Die Gebiete der jeweiligen Farben bestehen alle aus sechs kongruenten Teilflächen. Es genügt also, diese Teilflächen zu vergleichen. Außerdem lässt die Figur ein Grundgerüst aus gleichseitigen Dreiecken erkennen, deren Seitenlänge r mit den Radien der sechs inneren Kreise und deren Abstand zu den benachbarten Mittelpunkten übereinstimmt.
Die inneren grünen Blütenblätter bestehen aus zwei kongruenten Kreisabschnitten. Diese tauchen auch in den anderen Teilflächen auf.



Betrachtet man z.B. eine rote und eine gelbe Teilfläche, so stellt man fest, dass man diese durch wegnehmen und hinzufügen zweier Kreisabschnitte aus zwei Dreiecken des Grundgerüsts erzeugen kann. Die rote und die gelbe Teilfigur (und damit auch die rote und die gelbe Gesamtfläche) stimmen also in ihrem Flächeninhalt überein.



Der Radius des äußeren Kreises ist doppelt so groß wie der Radius der kleinen Kreise. Der Flächeninhalt des abgebildeten Kreisabschnitts (eine blaue und zwei grüne Flächen) ist also viermal so groß, wie der Inhalt eines grünen Kreisabschnitts. Die blaue Teilfläche ist demnach so groß wie die beiden grünen, die zusammen eines der sechs inneren Blütenblätter bilden.
Der Gesamtinhalt der blauen und grünen Teilflächen ist damit ebenfalls gleich, aber kleiner als der Gesamtinhalt der roten und gelben Teilflächen.

Der Vergleich kann auch rechnerisch durchgeführt werden (allgemein oder an einem konkreten Beispiel).