Mathematik ohne Grenzen 16. März 2012
Lösungshinweise

Aufgabe 1 – *Evident* – 7 Punkte

Ein Jahr hat 365 oder 366 Tage. Im ungünstigsten Fall gibt es in Nicoles Dorf 365 oder 366 verschiedene Geburtstage. Da das Dorf aber mehr als 400 Einwohner hat, ist es sicher, dass mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben.

Es gibt 10^4 Möglichkeiten für einen PIN Code aus vier Ziffern. Bei 10 Millionen Handys gibt es mindestens $\frac{10^7}{10^4} = 10^3$ Handynutzer, die den gleichen Code für ihr Handy verwenden. Da dies mehr als 366 sind, gibt es darunter mindestens zwei, die auch am gleichen Tag Geburtstag haben.

Aufgabe 2 – *Ganz egal* – 5 Punkte

Die größte fünfstellige Zahl ist 99 999. Der Taschenrechner liefert $\sqrt{99\,999} \approx 316{,}22\ldots$

Dies beschränkt die Suche nach dreistelligen Palindromen auf Zahlen unter 316.

Man berechnet 313^2, 303^2, 292^2 usw., die keine Palindrome sind, bis zur Lösung **212^2 = 44944**

Aufgabe 3 – *Massenhaft* – 7 Punkte

Die Massen der drei Wägestücke sind 1 kg, 3 kg und 9 kg. Sie lassen sich wie folgt kombinieren:

1=1 2=3-1 3=3 4=3+1 5=9-3-1 6=9-3 7=9-3+1 8=9-1 9=9 10=9+1
11=9+3-1 12=9+3 13=9+3+1

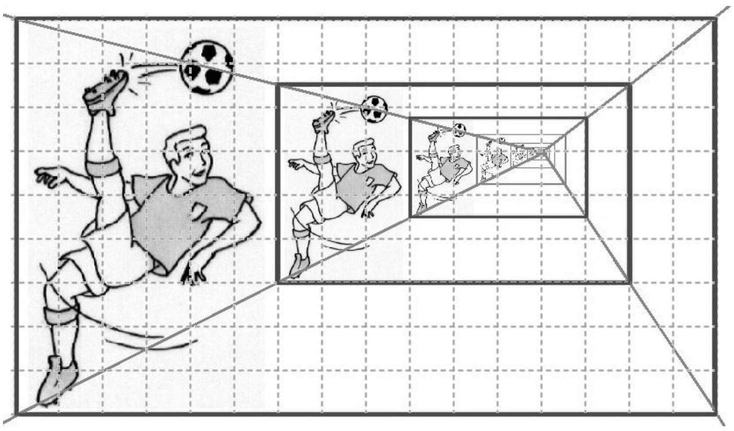
Auch wenn man über 13 kg hinausgeht, setzen sich die „optimalen Wägestücke“ aus Dreierpotenzen zusammen.

Siehe auch: Balanciertes Ternärsystem .

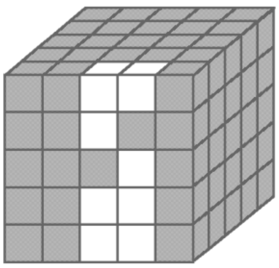
Aufgabe 4 – *Telefußball* – 5 Punkte

Größe und Position des zweiten Bildschirms lassen sich der Abbildung des Aufgabenblatts entnehmen. Auf diese Weise wird eine zentrische Streckung mit dem Streckfaktor 0,5 festgelegt, mit der sich Größe und Position des dritten Bildschirms ermitteln lassen.

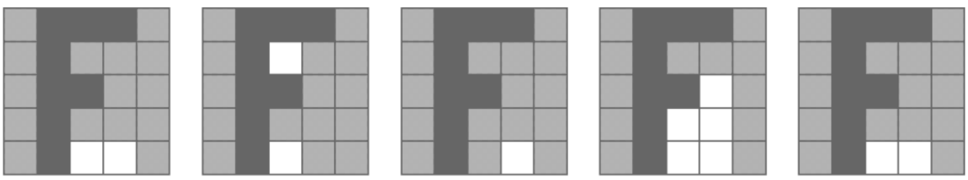
Die linke untere Ecke des zweiten Bildschirms ist 3 cm vom unteren und 6 cm vom linken Rand des ersten Bildschirms entfernt.



Aufgabe 5 – *Schwarzweiß gewürfelt* – 7 Punkte

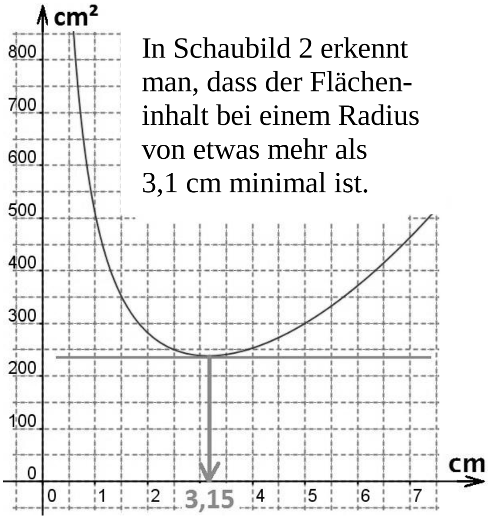


Hier der Würfel, nachdem auf allen Seiten eine Schicht entfernt wurde.
Zählt man die weißen Würfel schichtweise, so erhält man **12 weiße Würfel.**

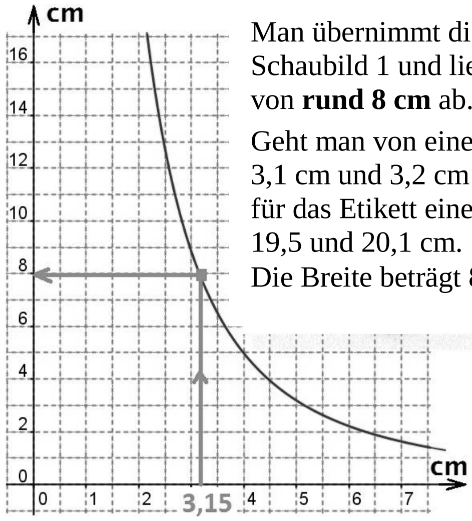


couche 1 couche 2 couche 3 couche 4 couche 5

Aufgabe 6 – *Schau genau!* – 5 Punkte



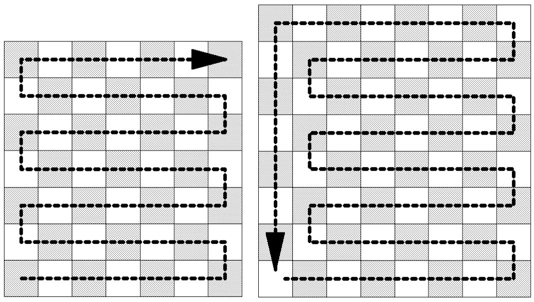
In Schaubild 2 erkennt man, dass der Flächeninhalt bei einem Radius von etwas mehr als 3,1 cm minimal ist.



Man übernimmt diesen Wert in Schaubild 1 und liest eine Zylinderhöhe von **rund 8 cm** ab.

Geht man von einem Radius zwischen 3,1 cm und 3,2 cm aus, so ergibt sich für das Etikett eine Länge zwischen 19,5 und 20,1 cm.
Die Breite beträgt 8 cm.

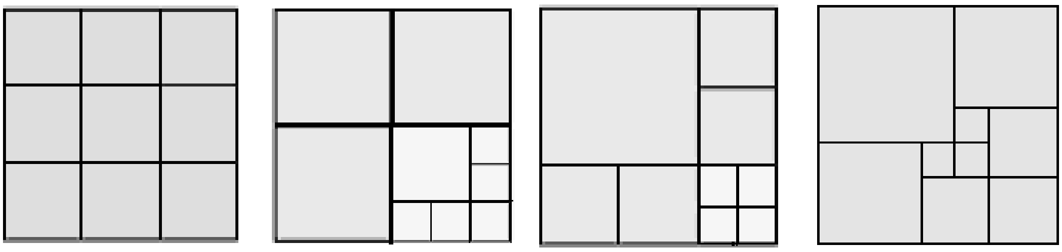
Aufgabe 7 – *Start und Ziel* – 7 Punkte



Hier ein erfolgloser Versuch für ein Schachbrett mit 7x7 Feldern und ein möglicher Weg für ein Brett mit 8 × 8 Feldern. Nach solchen Versuchen vermutet man, dass ein geschlossener Weg bei Brettern mit einer ungeraden Anzahl von Feldern unmöglich ist.

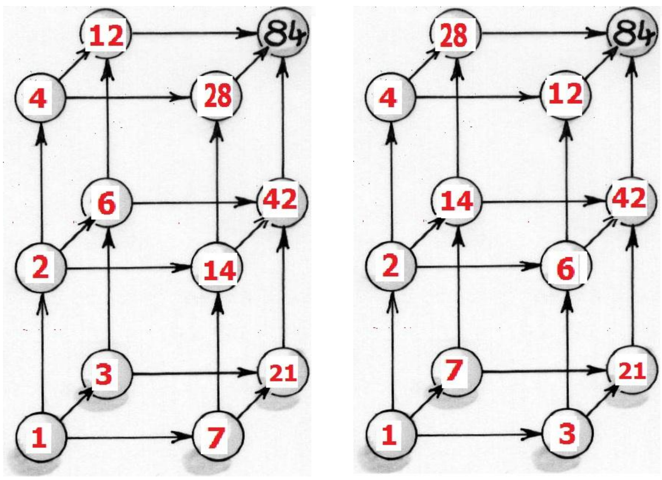
Beweis: Die Anzahl der benötigten Schritte entspricht der Anzahl der Felder. Bei jedem Schritt wechselt man die Farbe. Folglich befindet man sich bei einer ungeraden Anzahl von Schritten auf einem Feld, das eine andere Farbe hat wie das Ausgangsfeld. Es ist also unmöglich, zum Feld a1 zurückzukommen.

Aufgabe 8 – *Viermal neun* – 5 Punkte :



Informationen zur Zerlegung von Quadraten in Quadrate: http://www.squaring.net/

Aufgabe 9 – *In Pfeilrichtung* – 7 Punkte

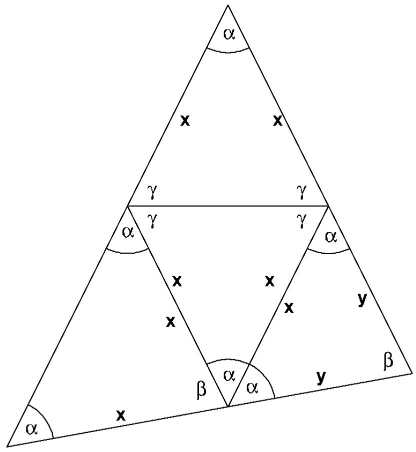


84 besitzt 12 Teiler, die auf die 12 Kugeln zu verteilen sind.

Es gibt zwei symmetrische Anordnungen. Sie ergeben sich aus der Zerlegung von 84 in Primfaktoren:

$$\boxed{84 = 2^2 \times 3 \times 7}$$

Aufgabe 10 – *Dreieckspuzzle* – 10 Punkte



Hier die vier Teildreiecke und ihre Anordnung.
Aus der Winkelsumme der Teildreiecke ergibt sich

$\beta = 180 - 2\alpha$ und $\gamma = 90 - \frac{\alpha}{2}$.

Dort wo die Ecken der Dreiecke zusammenstoßen, ergänzen sich die Winkel zu 180°. Dies bedeutet, dass die Anordnung der Teildreiecke tatsächlich ein Dreieck ergibt.

Die Gleichschenkligkeit folgt aus der Gleichheit zweier Innenwinkel oder aus der Gleichheit zweier Seiten.

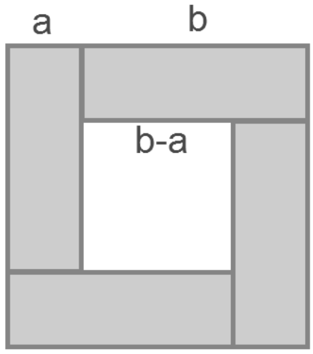
Aufgabe 11 – *Chancen für Schwarz* – 5 Punkte

Durch n Nägel wird das Glücksrad in n gleich große Sektoren unterteilt.
Sei p die Anzahl dieser Sektoren, welche den weißen Sektor bilden.

Dann gilt $\frac{p+1}{n} = \frac{1}{3}$ und $\frac{p-1}{n} = \frac{3}{10}$. Daraus erhält man $p = 19$ und $n = 60$.

P(Schwarz) $= 1 - \frac{3}{10} - \frac{19}{60} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{20}}$.

Aufgabe 12 – *Zieharmonikastücke* – 7 Punkte

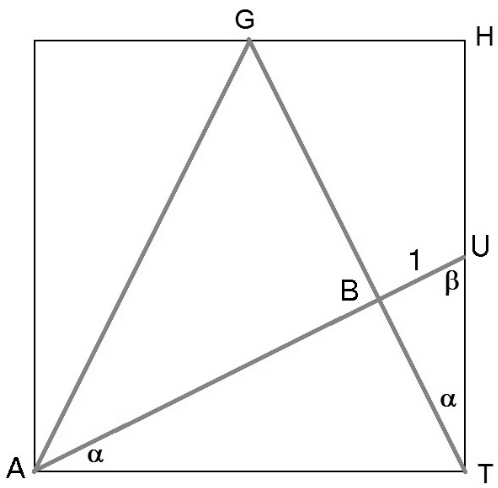


Sind a und b die Seitenlängen der vier Rechtecke (a<b), so hat das äußere Quadrat die Seitenlänge a + b und das innere die Seitenlänge b - a.
Für die Flächeninhalte gilt $(a + b)^2 = 4(b - a)^2$.

Für die Seitenlängen folgt daraus $a + b = 2(b - a)$ und damit $b=3a$.

Das Papierblatt hat also das Seitenverhältnis **3a:4a** oder aber **12a:a**, wobei die Abbildung des Aufgabenblattes eher die erste Lösung nahelegt.

Aufgabe 13 – *Von der Mitte in die Ecke* – 10 Punkte



Die Dreiecke ATU und THG sind kongruent.

Es gilt also ∢TAU = ∢HTG = α.

Da das Dreieck ATU rechtwinklig ist, gilt α + β = 90°.

Die Dreiecke TUB und ATB sind damit ebenfalls rechtwinklig.

Nun gilt $\tan(\alpha) = \frac{UT}{AT} = \frac{BU}{TB} = \frac{TB}{AB} = \frac{1}{2}$.

Man erhält damit BT = 2 cm, AB = 4 cm und AU = 5 cm.

Da die drei Teilstrecken des Streckenzugs gleich lang sind, hat dieser eine Gesamtlänge von 15 cm.

Die Aufgabe lässt sich auch mit Hilfe der Strahlensätze oder mit dem Satz des Pythagoras lösen