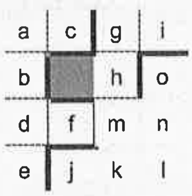
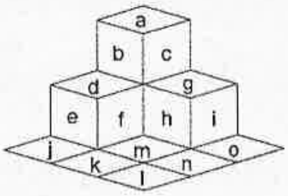
Aufgabe 1: Wer die Wahl hat...?

Die Befürworter von Berlin können geltend machen, dass Berlin mit 13 zu 12 Stimmen vor Athen genannt wurde. Mit dem gleichen Argument kann man nun aber auch sagen, dass 13 Schüler lieber nach Cordoba als nach Berlin fahren würden. Durch diese Argumentation kann also keine Entscheidung herbei geführt werden. Man bezeichnet diese Situation als Condorcet-Paradoxon (nach Nicolas Condorcet 1743-1794).

Aufgabe 2: Siegertreppchen

Eine mögliche Lösung:





Aufgabe 3: Trichromix

Es gibt drei verschiedene **einfarbige** Tetraeder.
Bei den **zweifarbigen** Tetraedern unterscheidet man zwei Arten, für die nur die Auswahl der Farben entscheidend ist:

- Für drei gleichfarbige Flächen stehen 3 Farben, für die vierte Fläche jeweils 2 Farben zur Wahl. Es gibt also 6 verschiedene Tetraeder dieser Art.
- Bei 2 mal 2 gleichfarbigen Seiten gibt es 3 Möglichkeiten, 2 aus 3 Farben zu wählen und damit auch 3 Tetraeder dieser Art.

Bei den **dreifarbigen** Tetraedern tragen jeweils zwei Flächen die gleiche Farbe. Dafür stehen 3 Farben zur Wahl. Aus Symmetriegründen erhält man für die restlichen beiden Farben keine unterschiedlichen Tetraeder. Es gibt also 3 Sorten dreifarbiger Tetraeder.
Insgesamt gibt es 3+6+3+3=15 unterschiedlich gefärbte Tetraeder.

Aufgabe 4: Würfelkalender

Die Ziffern 0, 1 und 2 müssen mit allen Ziffern kombiniert werden und damit auf beiden Würfeln vertreten sein. Es bleiben also sechs Flächen für die restlichen 7 Ziffern übrig. Da jedoch die Ziffern 6 und 9 nicht gemeinsam auftreten, kann die 6 auch als 9 benutzt werden.

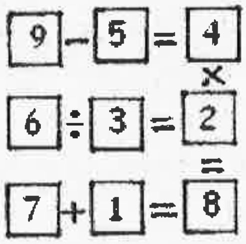
Aufgabe 5: Einfach süß

Seien x, y und z die Anzahl der Zuckerstücke in jeder Richtung.
Die Tabelle zeigt die unterschiedlichen Zerlegungen von 252 in drei Faktoren. Dabei entspricht das Tripel (4/7/9) am ehesten den Vorgaben der Aufgabenstellung, denn es ist $9 \approx 2 \cdot 4$ und $7 \approx 1{,}5 \cdot 4$.
Eine Schicht enthält also 7 Reihen aus 9 Zuckerstücken und es liegen 4 Schichten übereinander.

x	y	z
2	3	42
2	6	21
2	9	14
3	4	21
3	6	14
4	7	9
6	6	7

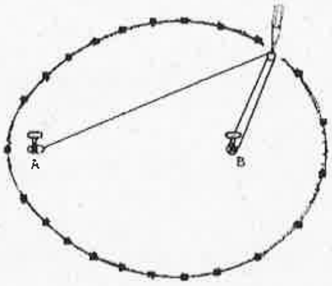
Aufgabe 6: Fast ein Sudoku

Die Abbildung zeigt eine der beiden Lösungen (7 und 1 können vertauscht werden).



Aufgabe 7: L'ove story

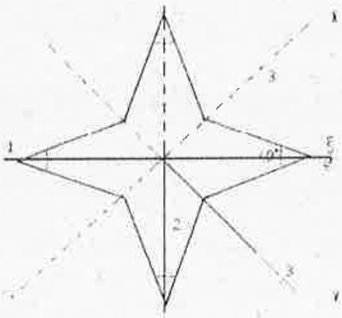
MA	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	116
MB	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	37

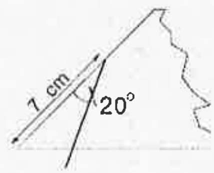


Aus Symmetriegründen entsprechen jedem Zahlenpaar zwei Kurvenpunkte.
Die in der Abbildung gezeigte Fadenkonstruktion ist in der Aufgabe nicht verlangt, sollte aber den Schülern bei der Besprechung nicht vorenthalten werden.

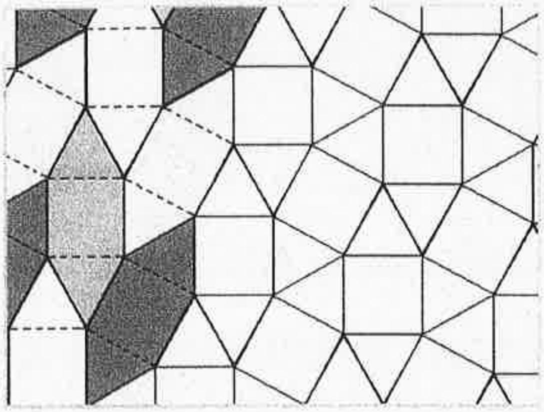
Aufgabe 8: Just one cut

Das Papier wird dreifach gefaltet. Bei der letzten Faltung muss darauf geachtet werden, dass die Faltkanten der vorausgegangenen Faltungen übereinander liegen. Danach schneidet man, wie in der Abbildung angegeben, ein Dreieck ab, das beim Entfalten den verlangten Stern ergibt.





Aufgabe 9: Jurassic Park



Die Abbildung lässt im getönten Anteil erkennen, dass die Pflasterung aus einer Grundfigur gebildet wird, welche aus einem Quadrat und zwei sich gegenüber liegenden Dreiecken besteht.
Der Flächeninhalt dieser Grundfigur beträgt
900 cm²+2 390 cm² = 1680 cm²=0,1680 m².
Für eine Fläche von 100 m² benötigt man rund 600 dieser Grundfiguren. Es sind also etwa **600 Quadrate und 1200 Dreiecke** notwendig.

Aufgabe 10: Klapperatismus

Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich im Dreieck AE_3B der Abstand $\overline{AB} = 40\,\text{cm}$.

Im Dreieck AE_1B erhält man damit $\overline{AE_1} = 10 \cdot \sqrt{7}\,\text{cm}$. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Vertiefungen ist daher $(\overline{AE_3} - \overline{AE_1}) : 2 = 25\,\text{cm} - 5\sqrt{7}\,\text{cm} \approx 11{,}8\,\text{cm}$. Weiter folgt $\overline{AE_4} \approx 68{,}8\,\text{cm}$ und $\overline{AE_5} \approx 73{,}6\,\text{cm}$.

Wegen $\overline{AB} + \overline{BC} = 70\,\text{cm}$ ist der Punkt E_4 erreichbar, E_5 dagegen nicht (Dreiecksungleichung).

Klassenstufe 11

Aufgabe 11: Multiplissimus

Die gesuchte Zahl muss ein Vielfaches von 30 sein. Die letzte Ziffer der gesuchten Zahl hat den Wert 0 und trägt zur Quersumme nichts bei. Die Summe der übrigen Ziffern muss 30 ergeben und aus möglichst wenig Summanden bestehen. Durch die Zahl **39 990** werden alle Bedingungen erfüllt. Es ist die kleinste Zahl mit der gesuchten Eigenschaft.

Aufgabe 12: Verdünnisiert

Nach jedem Auffüllen hat die Fruchtsaftmenge F um 25% abgenommen. Sobald sie weniger als 50 ml beträgt, wird nicht mehr aufgefüllt. Dies ist nach 11 Füllungen der Fall, denn $1000\,\text{ml} \cdot 0{,}75^{11} = 42{,}2\,\text{ml}$. Bis dahin hat Marcel 11 Gläser ausgeschenkt. Er kann noch 4 weitere Gläser, also **insgesamt 15 Gläser** ausschenken.

Aufgabe 13: Verfolgungsjagd

Die Geschwindigkeit des Feldes beträgt $\frac{5}{4}$ der Geschwindigkeit Julians. Wenn Julian 20 km zurücklegt, legt das Feld 25 km zurück. Damit er gewinnt, muss er mehr als 5 km Vorsprung haben.

Seine Geschwindigkeit muss also größer sein als $\frac{5\,\text{km}}{8\,\text{min}} = 37{,}5\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

Formale Lösung: Sei v die Geschwindigkeit von Julian. Dann ist die Geschwindigkeit des Feldes $1{,}25 \cdot v$.

Für die Strecke von 25 km benötigt Julian die Zeit $t_1 = \frac{25\,\text{km}}{v}$. Wenn das Feld die Marke passiert hat er noch $t_1 - 8\,\text{min}$ zu fahren, während das Feld die Zeit $t_2 = \frac{25\,\text{km}}{1{,}25 \cdot v}$ benötigt. Damit Julian gewinnt, muss $t_1 - 8\,\text{min} < t_2$ gelten.

$$\frac{25\,\text{km}}{v} - 8\,\text{min} < \frac{25\,\text{km}}{1{,}25\,v} \Rightarrow 25\text{km} \cdot 1{,}25 - 8\,\text{min} \cdot 1{,}25\,v < 25\,\text{km} \Rightarrow v > \frac{0{,}25 \cdot 25\,\text{km}}{8\,\text{min} \cdot 1{,}25} \Rightarrow v > 0{,}625\frac{\text{km}}{\text{min}} \Rightarrow v > 37{,}5\frac{\text{km}}{\text{h}}.$$