Mathematik ohne Grenzen

ein internationaler Wettbewerb für Klassenstufe 10 und 11

Probewettbewerb 2001/2002

Für jede Aufgabe, auch für die nicht bearbeiteten, ist ein gesondertes Lösungsblatt abzugeben. Bei den Aufgaben 2, 5, 9, 10, 11, 12 und 13 muss die Lösung begründet oder erläutert werden. Die Sorgfalt der Ausführung wird mitbewertet. Auch Teillösungen werden berücksichtigt.

Aufgabe 1
7 Punkte

Mots de tête

(nach dem gleichnamigen Buch von Pierrre Légaré)

Die Lösung soll in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter umfassen.

L'humoriste québécois Pierre Légaré pratique volontiers l'art des jeux de mots et s'amuse à nous présenter des paradoxes sous forme de petites phrases. En voici deux exemples :

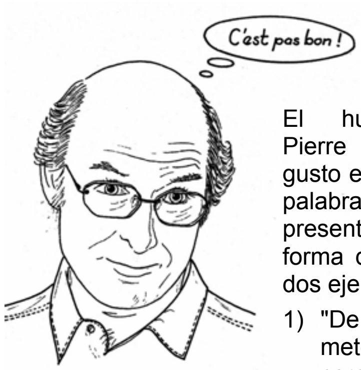
1) « En fait, si la météo se trompait tout le temps, là on pourrait se fier dessus. »
2) « Selon les statistiques, il y a 1 personne sur 5 qui est déséquilibrée. S'il y a 4 personnes autour de toi et qu'elles te semblent normales, c'est pas bon. »

Analyser et critiquer ces deux phrases du point de vue logique et mathématique.

Quebec humorist Pierre Légaré enjoys playing with words and presenting paradoxes by means of short sentences. Here are two examples :

1) "Actually, if the weather forecast was always wrong, on this point you could rely on it."
2) "According to statistics, one person out of five is unbalanced. If there are four people around you and if they look balanced to you, then it's not good."

Analyse and criticise those two sentences from a logical and mathematical point of view.



El humorista quebequés Pierre Légaré practica con gusto el arte de los juegos de palabras y le alegra presentamos paradojas en forma de frasecitas. He aquí dos ejemplos de ellas :

1) "De hecho, si los meteorólogos se equivo caran siempre, uno podría fiarse de ellos."
2) "Según las estadísticas, 1 persona de cada 5 está desequilibrada. Si en torno tuyo están 4 personas y que te parecen normales, ¡ay de ti !"

Analiza y critica estas dos frases desde el punto de vista lógico y mathemático.

L'umorista del Quebec Pierre Légaré gioca volentieri con le parole e si diverte a presentarci dei paradossi sotto forma di brevi affermazioni.

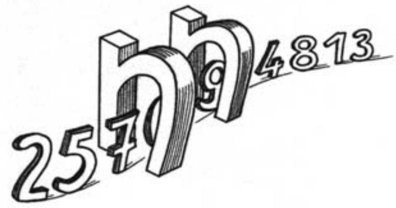
Eccone due esempi :

1) "Di fatto, se il servizio meteo si sbagliasse ogni volta, in questo caso ci si potrebbe fidare."
2) "Secondo le statistiche, una persona su 5 non è equilibrata. Se attorno a te ci sono 4 persone che ti sembrano equilibrate, non è una buona situazione."

Analizza e critica le due affermazioni dal punto di vista logico e matematico

Aufgabe 2 – 5 Punkte

Zahl und Ziffer



Gesucht ist eine fünfstellige natürliche Zahl. Diese Zahl und ihr Doppeltes sollen zusammen genau die Ziffern von 0 bis 9 aufweisen.

Gib eine solche Zahl an und bestätige die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 3 – 7 Punkte

Farbzopf

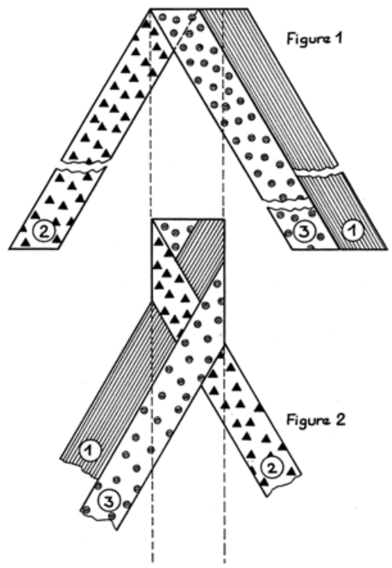


Bild 1 zeigt drei deckungsgleiche, verschiedenfarbige Papierstreifen. Jeder Streifen hat die Form eines Parallelogramms mit zwei Seiten von 2 cm Länge und zwei Winkeln von 60°. Der Streifen Nr.3 überdeckt eine Ecke des Streifens Nr.2. Wenn man diese Streifen abwechselnd übereinander faltet, erhält man einen Zopf. Bild 2 zeigt den Anfang.

Falte auf diese Weise einen 3 cm breiten, rechteckigen Zopf, der mindestens 15 cm lang ist, und klebe ihn auf das Lösungsblatt. Der Inhalt aller sichtbaren Flächen soll für jede Farbe der gleiche sein.

Aufgabe 4 – 5 Punkte

Metamorphose

Die abgebildete Zerlegung eines gleichseitigen Dreiecks stammt von dem englischen Mathematiker H.E. Dudeney (1857-1930). Aus den vier Teilstücken dieses Puzzles lässt sich lückenlos ein Quadrat zusammensetzen.

Hier die Beschreibung zur Herstellung des Puzzles:

Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit 8 cm Seitenlänge. Kennzeichne die Seitenmitten von AB und AC mit I beziehungsweise J.

Lege auf der Halbgeraden [JA) den Punkt R so fest, dass $\overline{JR} = \overline{JB}$ gilt.

Konstruiere nun den Halbkreis mit dem Durchmesser CR, welcher außerhalb des Dreiecks ABC liegt. Er schneidet die Gerade (BJ) im Punkt H.

Die Punkte K und L liegen auf der Seite BC wobei $\overline{JK} = \overline{JH}$ und $\overline{KL} = \overline{CJ}$ gilt.

Lege schließlich auf der Strecke KJ die Punkte M und N so fest, dass KJ zu IM und zu LN orthogonal ist.

Konstruiere diese Figur auf das Lösungsblatt. Wiederhole die Konstruktion auf einem zweiten Blatt und schneide die vier Puzzleteile aus. Füge sie zu einem Quadrat zusammen und klebe dieses auf das Lösungsblatt.

Aufgabe 5 – 7 Punkte

Anstandsrest

Jacques und Germain wollen zusammen eine Tafel Schokolade vertilgen. Beide sind gleich große Naschkatzen, aber keiner will egoistisch sein und das letzte Stückchen nehmen.

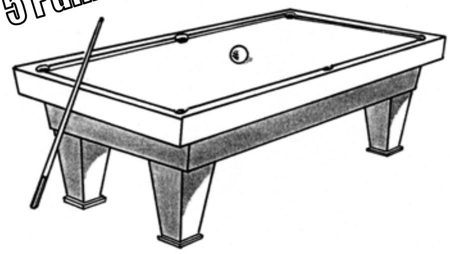
Die ganze Tafel besteht aus 24 Stücken. Sie beschließen, die Tafel abwechselnd in zwei rechteckige Teile zu zerbrechen, längs der vertikalen oder der horizontalen Linien, welche die Stücke trennen. Der eine Teil wird aufgegessen, der andere an den Freund weitergegeben.

Jacques beginnt zu teilen und erreicht, dass Germain schließlich das letzte Stück nehmen muss.

Beschreibe, nach welcher Strategie Jacques vorgegangen ist?

Aufgabe 6 – 5 Punkte

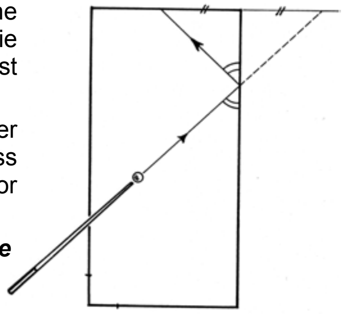
Billard



Die rechte Abbildung zeigt von oben, wie eine Billardkugel an der Bande abprallt, wenn sie ohne Effet gestoßen wurde. Die Spielfläche ist rechteckig und misst 1,40 m auf 2,80 m.

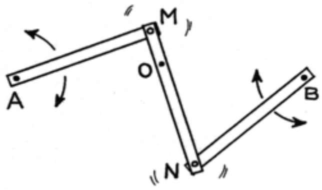
Man legt eine Kugel in das Zentrum der Spielfläche. Sie soll so gespielt werden, dass sie nacheinander an drei Banden stößt, bevor sie in einem der vier Ecklöcher verschwindet.

Zeichne auf das Antwortblatt die Spielfläche im Maßstab 1:40. Konstruiere die Bahn der Kugel und lasse alle Hilfslinien stehen.



Aufgabe 7 – 7 Punkte

Gelenkig



Die Abbildung zeigt eine Anordnung von Gelenkstäben, welche auf einer Platte montiert sind. Die Befestigungspunkte A und B haben einen Abstand von 16 cm. Die Stäbe AM und BN sind in A und B drehbar gelagert und durch den mittleren Stab verbunden.

Die Punkte M und N sind Gelenke, welche sich über die Platte bewegen können. Es gilt $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{MN} = 8\text{cm}$.

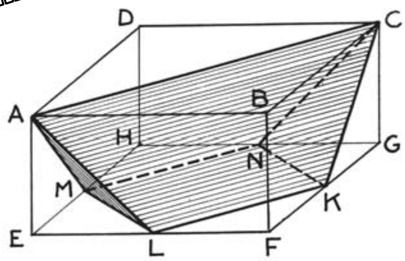
Der Punkt O befindet sich auf dem Stab MN. Er ist 2 cm von M und 6 cm von N entfernt.

Verschiebt man diesen Stab in alle möglichen Positionen, so beschreibt der Punkt O eine überraschende Kurve.

Zeichne diese Kurve auf das Lösungsblatt.

Aufgabe 8 – 5 Punkte

3D-Puzzle



Bei einem Quader mit den Ecken ABCDEFGH ist die Kante AE 3cm lang. ABCD ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm, M, K, L, N sind Seitenmitten.

Stelle zwei Körper ACKNML her und setze sie so zusammen, dass eine Pyramide entsteht. Schenke sie deiner Lehrerin oder deinem Lehrer.

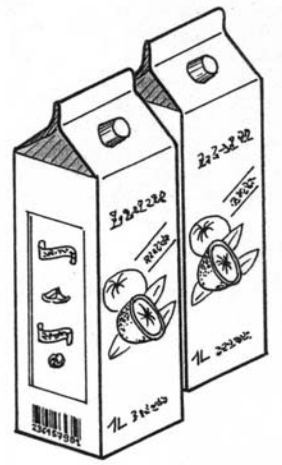
Aufgabe 9 – 7 Punkte

EAN-Code

Der EAN-Code (europäische Artikelnummer) besteht aus zwölf Ziffern und einer Kontrollziffer.

3 116430 058089

Das nebenstehende Beispiel zeigt, wie der Code aufgebaut ist:



Von links nach rechts kennzeichnen die beiden ersten Ziffern das Herstellerland. Dann folgen fünf Kennziffern für den Hersteller und schließlich 5 Ziffern zur Kennzeichnung des Produkts. Die letzte Ziffer, hier die 9, ist die Kontrollziffer.

Zur Berechnung der Kontrollziffer multipliziert man die ersten 12 Ziffern, von links beginnend, abwechselnd mit 1 und 3 und ergänzt anschließend die Summe der Produkte zur nächsthöheren Zehnerzahl.

Bei unserem Beispiel erhält man:

$3\cdot\mathbf{1}+1\cdot\mathbf{3}+1\cdot\mathbf{1}+6\cdot\mathbf{3}+4\cdot\mathbf{1}+3\cdot\mathbf{3}+0\cdot\mathbf{1}+0\cdot\mathbf{3}+5\cdot\mathbf{1}+8\cdot\mathbf{3}+0\cdot\mathbf{1}+8\cdot\mathbf{3}=91$.

Die Differenz zur nächsthöheren Zehnerzahl ist **9**.

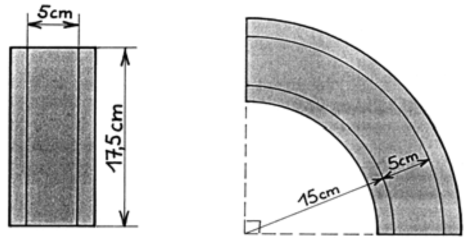
Die Kontrollziffer soll helfen, Eingabefehler zu entdecken. Dennoch gibt es viele EAN-Codes mit derselben Kontrollziffer. So ist es zum Beispiel möglich, dass bei manchen Codes zwei benachbarte Ziffern vertauscht werden und dennoch die gleiche Kontrollziffer erzeugt wird.

Finde alle Ziffernpaare, bei denen sich trotz Vertauschung der beiden Ziffern dieselbe Kontrollziffer ergibt.

Aufgabe 10
10 Punkte

Formel 1

Harry hat eine Rennbahn für zwei elektrische Autos. Jedes Auto hat eine eigene Spur. Die beiden Spuren sind 5 cm voneinander entfernt.



Um eine Rennstrecke aufzubauen, stehen ihm zehn 17,5 cm lange gerade Strecken und zehn 90°-Kurven mit einem inneren Bahnradius von 15 cm zur Verfügung.

Die Rennstrecke soll immer am Boden verlaufen, sich nicht überkreuzen und geschlossen sein.

Harry weiß, dass das Auto, welches auf der Außenspur fährt, im Vergleich zur Innenspur immer einen längeren Weg zurücklegen muss, und er fragt sich, ob dieser Wegunterschied von der Form der Rennstrecke abhängt.

Skizziere zwei Rennstrecken im Maßstab 1:5. Die erste soll möglichst kurz, die zweite möglichst lang sein.

Berechne für beide Rennstrecken die Wegdifferenz zwischen den beiden Spuren.

Wäre es möglich mit einer anderen Anzahl von Elementen eine Rennstrecke aufzubauen, bei der die Wegdifferenz der beiden Spuren noch größer ist ? Begründe !

Klasse 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Zeitlicher Ablauf

Zwei baugleiche Behälter haben in Bodenhöhe jeweils einen großen und einen kleinen Hahn. Beide Behälter sind gefüllt.

Öffnet man nur den großen Hahn, so dauert es 30 Minuten bis ein Behälter leer ist. Öffnet man nur den kleinen Hahn, so dauert es eine Stunde. Die Flüssigkeit strömt gleichförmig aus, Markierungen sind nicht vorhanden.

Wie kann man allein mit Hilfe dieser beiden Behälter eine Zeitspanne von 40 Minuten abmessen?

Aufgabe 12
7 Punkte

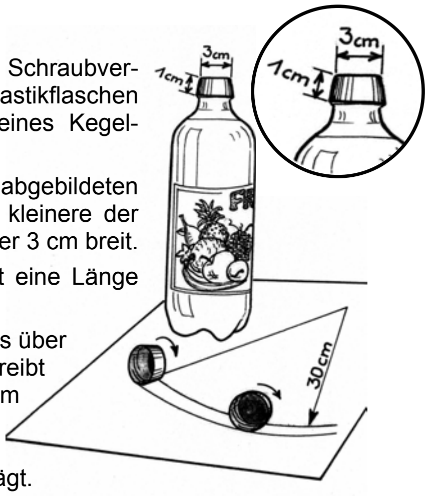
Verschlusssache

Die meisten Schraubverschlüsse von Plastikflaschen haben die Form eines Kegelstumpfes.

Bei dem abgebildeten Verschluss ist der kleinere der beiden Durchmesser 3 cm breit.

Die Mantellinie hat eine Länge von 1 cm.

Rollt der Verschluss über einen Tisch, beschreibt seine Bahn die Form eines Kreisrings, dessen innerer Radius 30 cm beträgt.



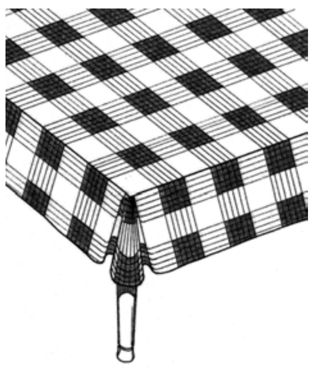
Berechne den größeren der beiden Durchmesser des Schraubverschlusses.

Aufgabe 13
10 Punkte

Kariert

Das Muster der abgebildeten Tischdecke besteht aus weißen, dunklen und gestreiften quadratischen Karos. Auf dieser Tischdecke betrachtet Franz ein Quadrat aus mehreren Karos, bei dem die vier Eckkaros weiß sind. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Karos längs einer Quadratseite ungerade ist.

Franz weiß, dass man ungerade Zahlen in der Form 2n+1 schreiben kann, wobei n eine natürliche Zahl ist.



Wie viele Karos jeder Sorte enthält ein solches Quadrat, wenn auf eine Quadratseite 2n+1 Karos kommen? Bestimme die Anzahlen in Abhängigkeit von n.