

Lösungshinweise für den Probewettbewerb im Dezember 2003

1. Aufgabe : Rotkäppchen

Anna sagt sich: „Wenn mein Käppchen weiß wäre, würde Brigitte, wenn sie es sähe, mit Sicherheit sagen, dass das ihrige rot sei. Da Brigitte dies aber nicht sagt, kann mein Käppchen also nicht weiß sein. **Ich habe also ein rotes Käppchen.**“

Punktevorschlag: logische Erklärung 4 Punkte;
Sprachrichtigkeit 3 Punkte

2. Aufgabe: Um die Ecke gedacht

Die einzigen Würfel, die identisch sein können, sind A und D:

- C hat höchstens 2 abgeschnittene Ecken, und zwar an einer gemeinsamen Kante. Dies trifft für die anderen Würfel nicht zu. C kann also mit keinem anderen Würfel identisch sein.
- Wenn A und B jeweils nur 2 abgeschnittene Ecken haben, dann liegen sie bei B an der Raumdiagonalen, nicht aber bei A.
- Wenn A und B jeweils 3 abgeschnittene Ecken haben, dann liegen bei B zwei von ihnen an einer gemeinsame Kante, was bei A. nicht zutreffen kann.
- Da zwei Würfel identisch sein sollen, können dies nur A und D sein. Auch bei D liegen die drei abgeschnittenen Ecken nicht an einer gemeinsamen Kante.

Punktevorschlag: 2 Punkte für A und D und 3 Punkte für eine Erklärung der richtigen Wahl

3. Aufgabe: Hoch hinaus

Sei C die Anzahl der notwendigen Karten, um ein Haus mit n Etagen zu bauen, dann gilt:

- $C_1 = 2$
- $C_2 = 2 + 1 + 2 \cdot 2$

Allgemein: $C_{n+1} = C_n + n + 2(n+1) = C_n + 3n + 2$.

Aus dieser Rekursionsformel ergibt sich: $C_2 = 7$, $C_3 = 15$ usw....bis $C_{13} = 260$.

Man kann also mit 260 Karten ein Haus mit 13 Etagen bauen.

Bemerkung: Die explizite Formel lautet $C_n = n(3n+1)/2$.

Punktevorschlag: 3 Punkte für 13 Etagen und 4 Punkte für die Erklärungen und die schrittweisen Berechnungen (z.B. ¼ Punkt pro Etage)

4. Aufgabe: Es ist weniger chinesisch als man glaubt !

Hier eine mögliche Aufgabenstellung auf deutsch:

ABC ist ein Dreieck mit den Seitenlängen 5 cm, 6 cm und 7 cm.

Konstruiere einen Kreis mit Mittelpunkt A, einen Kreis mit Mittelpunkt B und einen Kreis mit Mittelpunkt C, jeweils tangential an die beiden anderen Kreise.

Punktevorschlag: nach Ermessen des Korrektors

5. Aufgabe: Käsewürfel

Zwei Schichten mit 9 cm^3 liegen zwischen drei Schichten mit 21 cm^3 , damit erhält man 81 cm^3 für das gesamte Volumen.

Punktevorschlag: je nach Rechenweg schrittweise Punkteverteilung

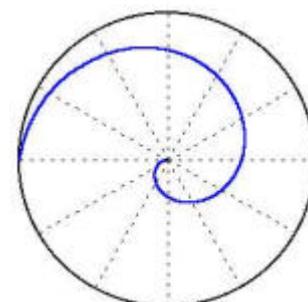
6. Aufgabe: Seitenweise

RECTO				VERSO			
8	9	16	1	2	15	10	7
25	24	17	32	31	18	23	26
28	21	20	29	30	19	22	27
5	12	13	4	3	14	11	6

Punktevorschlag: 3 Punkte für die richtige Platzierung (z.B.: 1 Punkt für 9 richtig nummerierte Seiten); 2 Punkte für die Orientierung der Zahlen

7. Aufgabe: Zeitreise

Punktevorschlag:
2 Punkte für die sorgfältige und schöne Darstellung;
1 Punkt für die Darstellung,
3 Punkte, wenn die Anzahl der Punkte ausreichend ist;
1 Punkt für eine regelmäßige, durchgezogene Linie.



8. Aufgabe: Zurück an den Start

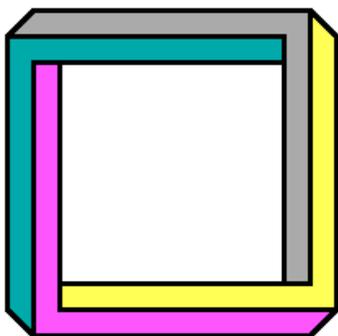
$$N = abc \cdot abc = 1000 \cdot abc + abc = (1000 + 1) \cdot abc \\ = 1001 \cdot abc = (7 \cdot 11 \cdot 13) \cdot abc.$$

$$\text{Also: } ((N:13):11):7 = N:1001 = abc.$$

Man findet immer die Ausgangszahl.

Punktevorschlag: 3 Punkte für das Vielfache von 1001; 3 Punkte für die Zerlegung von 1001 in 7, 11 und 13

9. Aufgabe: Penrose



Punktevorschlag: jegliche Zeichnung eines „unmöglichen Vierecks“ kann akzeptiert werden; 5 Punkte für eine richtig gezeichnete „Ecke“ und 2 Punkte für die sorgfältige und schöne Darstellung.

10. Aufgabe: Pisastudie

Die Aufteilung in 3 Münzen und 2 Münzen, wäre gerecht, wenn der Soldat alle 5 Brote allein gegessen hätte. Aber jeder Mann hat $\frac{5}{3}$ der Brote gegessen.

Der erste Mann, der 3 Brote mitgebracht hat, überlässt dem Soldaten $\frac{9}{3} - \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$.

Der andere, der 2 Brote mitgebracht hat, überlässt dem Soldaten $\frac{6}{3} - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$.

Also hat der erste viermal soviel Brot an den Soldaten gegeben als der zweite.

Die Aufteilung in 4 Münzen und 1 Münze ist also gerechter!

Punktevorschlag: Wenn die Aufteilung als gerecht angesehen wird, 0 Punkte; andernfalls nach Ermessen des Korrektors

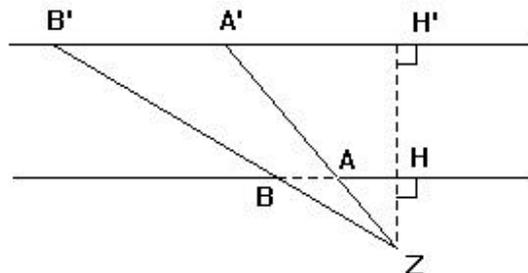
11. Aufgabe: Geißblatt:

Bei der Abwicklung ergibt sich ein Rechteck mit der Rankenlänge L als Diagonale.

$$L = \sqrt{(8p \cdot 0,4)^2 + 12^2} \approx 15,65 \text{ m.}$$

Punktevorschlag: 2 Punkte für die zeichnerische Darstellung; 2 Punkte für den Satz des Pythagoras und 1 Punkt für die Antwort.

12. Aufgabe: Träumerei



$$ZH = 1 \text{ m} ; HH' = 25 \text{ m} ; AB = 1 \text{ m.}$$

$$\text{Es gilt } \frac{A'B'}{AB} = \frac{ZH'}{ZH} \text{ also } A'B' = 26 \text{ m.}$$

Die Geschwindigkeit von Prosper beträgt also 13 m/s oder 46,8 km/h.

Punktevorschlag: 2 Punkte für die Schematisierung (Zeichnung im Hinblick auf den Strahlensatz); 2 Punkte für den Ansatz und 3 Punkte für die Rechnung.

13. Aufgabe: 100 Jahre Kino

In $\frac{1}{24}$ Sekunde macht das Rad $\frac{1}{12}$ Umdrehung. In 1s macht es 2 Umdrehungen. 1 Radumdrehung bringt die Postkutsche um $1,20 \cdot \pi$ Meter weiter.

Die Geschwindigkeit der Kutsche beträgt also $2,4 \cdot \pi$ m/s oder $2,4 \cdot \pi \cdot 3,6$ km/h, also **ungefähr 27 km/h.**

Punktevorschlag: 4 Punkte für die Berechnung von 2 Umdrehungen pro Sekunde; 1 Punkt für den Umfang; 4 Punkte für die Geschwindigkeit in m/s und 1 Punkt für die Umrechnung.