

Mathematik ohne Grenzen

ein internationaler Wettbewerb für Klassenstufe 10 und 11

Probewettbewerb 2003/2004

„Best of 1989-1995“

- Für jede Aufgabe, auch für die nicht bearbeiteten, ist ein gesondertes Lösungsblatt abzugeben
- Bei allen Aufgaben außer den Aufgaben 4, 6, 7 und 9 muss die Lösung begründet bzw. erläutert werden
- Die Sorgfalt der Ausführung wird mitbewertet
- Auch Teillösungen werden berücksichtigt

Aufgabe 1
7 Punkte

Rotkäppchen

Die Lösung muss in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter umfassen.

Dans une pièce obscure il y a trois bonnets, deux rouges et un blanc.

Anne et Brigitte en prennent chacune un, s'en coiffent et sortent de la pièce, Anne d'abord, puis Brigitte.

Brigitte voit la couleur du bonnet d'Anne mais Anne ne voit pas la couleur du bonnet de Brigitte.

Brigitte dit: "Je ne suis pas sûre de la couleur de mon bonnet".

Anne répond: "Alors moi, je connais la couleur du mien".

De quelle couleur est le bonnet d'Anne?

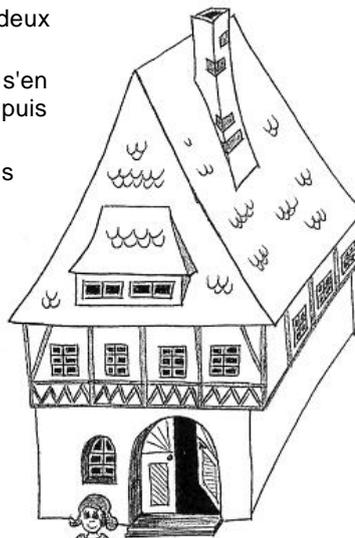
Explique pourquoi Anne le sait.

In a dark room there are three bonnets, two red ones and a white one. Anne and Brigitte take one each, put it on and leave the room, Anne first, then Brigitte.

Brigitte can see the colour of Anne's bonnet but Anne can't see the colour of Brigitte's bonnet.

Brigitte says: "I am not sure what the colour of my bonnet is". Anne answers: "So I know the colour of mine".

What colour is Anne's bonnet? Explain why.



In un locale buio vi sono tre berretti: due rossi e uno bianco.

Anna e Brigitta ne prendono uno ciascuna, lo infilano ed escono dalla stanza, prima Anna e poi Brigitta.

Brigitte vede il colore del berretto d'Anna, ma Anna non vede il colore di quello di Brigitte.

Brigitte dice: "Non sono sicura del colore del mio berretto". Anna risponde: "Allora io conosco il colore del mio".

Di quale colore è il berretto di Anna? Spiega perché Anna lo conosce.

En un cuarto oscuro, hay tres gorros: dos rojos y uno blanco. Ana y Brígida cogen cada una un gorro, se lo ponen en la cabeza y salen del cuarto; primero Ana y luego Brígida.

Brígida ve el color del gorro de Ana pero Ana no ve el del gorro de Brígida.

Brígida dice: "No estoy segura del color de mi gorro". Ana contesta: "Entonces yo, conozco el color del mío".

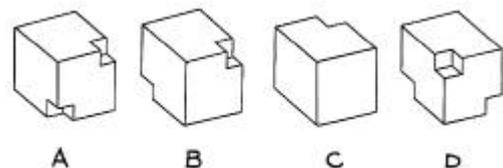
¿De qué color es el gorro de Ana? Explica por qué.

Aufgabe 2
5 Punkte

Um die Ecke gedacht

Die Zeichnungen stellen vier Holzwürfel dar, bei denen jeweils Ecken ausgefräst worden sind.

Nur zwei dieser Würfel sind identisch. Welche sind es? Begründe.



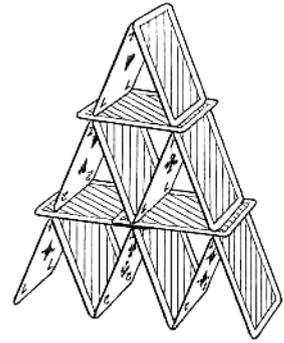
Aufgabe 3
7 Punkte

Hoch hinaus

Viktor ist überaus sorgfältig und geduldig. Er schickt sich an, ein Kartenhaus zu bauen, in der Art, wie es in der Zeichnung zu sehen ist. Es soll ein großes Haus werden, zu dem er alle seine Spielkarten benötigt.

Viktor hat ausgerechnet, dass seine fünf Kartenspiele mit jeweils 52 Karten genau ausreichen, um sein Projekt zu verwirklichen. Aber ach! Ehe er fertig wird, fällt das Bauwerk in sich zusammen.

Wie viele Etagen sollte das Kartenhaus, das sich Viktor bauen wollte, haben?

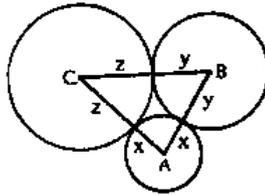


Aufgabe 4
5 Punkte

Es ist weniger chinesisches als man glaubt

Aufgabe:

已知 $\odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$ 两两外切，它们的圆心距分别是 5cm、6cm、7cm，求这三个圆的半径。



Links siehst du eine Aufgabe, eine Figur, die sie beschreibt und die Lösung der Aufgabe. Es ist ein Auszug aus einem chinesischen Schulbuch.

Denke dir eine Problemstellung aus, welche dieser Aufgabe entsprechen könnte und formuliere sie schriftlich.

Lösung:

解 设 $\odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$ 的半径分别为 x 、 y 、 z ，因为 $\odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$ 两两外切，于是有方程组

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 7 \\ x + z = 6 \end{cases}$$

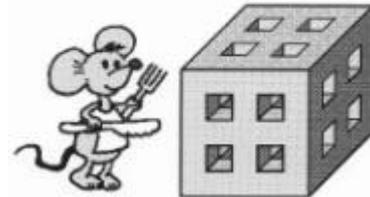
解之得：

$$x = 2, y = 3, z = 4.$$

答 $\odot A$ 、 $\odot B$ 、 $\odot C$ 的半径分别是 2cm、3cm、4cm。

Aufgabe 5
7 Punkte

Käsewürfel



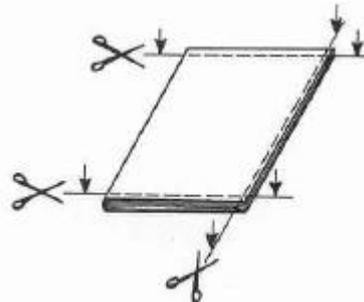
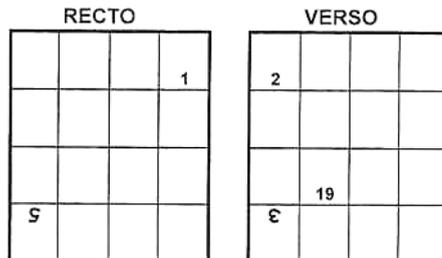
Ein massiver Würfel hat eine Kantenlänge von 5 cm. Man durchlöchert den Würfel, so wie es auf der Abbildung zu sehen ist. Die zwölf Bohrungen sind „regelmäßig“ angeordnet, verlaufen parallel zu den Würfelkanten und besitzen alle einen quadratischen Querschnitt mit der Seitenlänge 1 cm.

Berechne den Rauminhalt des durchlöcherten Würfels.

Aufgabe 6
5 Punkte

Seitenweise

Ein Drucker stellt eine Broschüre mit 32 Seiten her. Diese 32 Seiten werden auf einen einzigen großen Bogen gedruckt, 16 Seiten auf der Vorderseite und 16 Seiten auf der Rückseite.



Der Bogen wird anschließend längs der Mittellinie gefaltet, viermal hintereinander. Auf diese Weise erhält man ein Heft mit 16 Blättern, welches längs der letzten Faltkante geheftet und an den drei anderen Seiten beschnitten wird. Auf der Vorder- und Rückseite des abgebildeten Bogens wurden bereits fünf Seitennummern platziert.

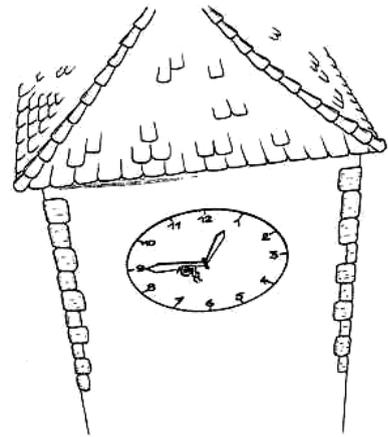
Übertrage die Vorder- und die Rückseite des Bogens auf das Lösungsblatt. Bringe die restlichen 27 Seitenzahlen so an, dass sie auf der fertigen Broschüre in der richtigen Reihenfolge und in der Mitte des unteren Seitenrandes erscheinen.

Aufgabe 7
7 Punkte

Zeitreise

Eine Schnecke kriecht gemütlich und mit konstanter Geschwindigkeit auf dem großen Zeiger einer Kirchturmuhr. Sie beginnt am äußeren Ende des Zeigers, 90cm vom Mittelpunkt des Zifferblattes entfernt. Es dauert eine Stunde, bis sie den Mittelpunkt schließlich erreicht hat.

Zeichne das Zifferblatt der Uhr im Maßstab 1:10 und trage auf diesem die Bewegungsbahn der Schnecke ein.



Aufgabe 8
5 Punkte

Zurück an den Start



Nimm eine beliebige dreistellige Zahl. Schreibe sie zweimal nebeneinander um eine sechsstellige Zahl N zu erhalten.

Wählt man zum Beispiel 637 als Ausgangszahl, so erhält man $N = 637637$.

Teile nun N durch 13, das Ergebnis durch 11 und den zuletzt erhaltenen Wert schließlich durch 7.

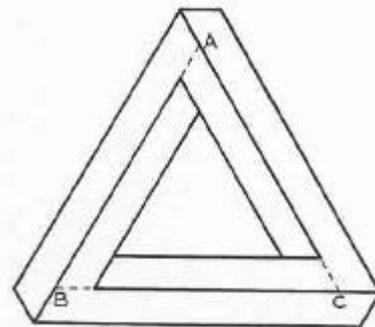
Probiere verschiedene dreistellige Zahlen aus. Was bemerkst du? Begründe deine Feststellung.

Aufgabe 9
7 Punkte

Penrose

Die Abbildung rechts zeigt ein „Penrosedreieck“, das auf dem gleichseitigen Dreieck ABC basiert.

Zeichne auf das Lösungsblatt ein „Penrosequadrat“ das auf einem Quadrat mit 8 cm Seitenlänge basiert.



Aufgabe 10
10 Punkte

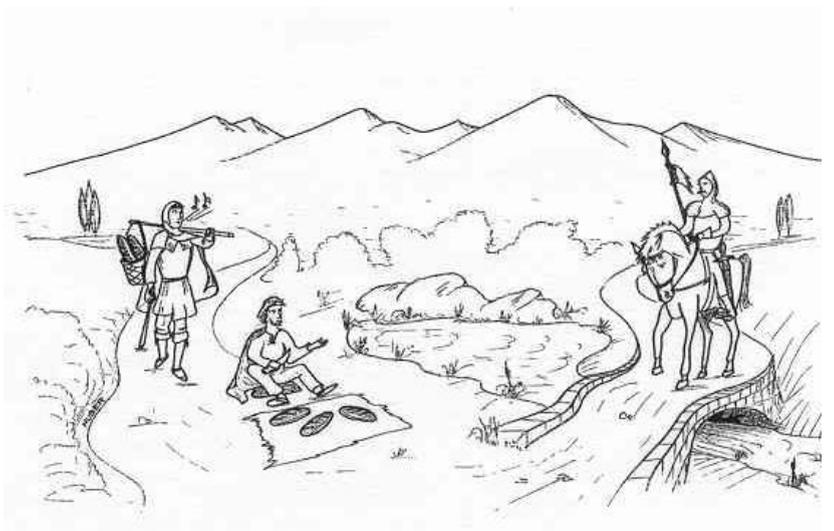
Pisastudie

Ein Mann hatte drei Brote und sein Geselle zwei, alle gleich groß. Sie gingen ihres Weges und als sie an eine Quelle kamen, setzten sie sich um zu essen. Ein Soldat kam vorbei und sie luden ihn ein, an ihrem Mahl teilzuhaben. Er ließ sich zu ihnen nieder und sie teilten die Brote zu gleichen Teilen untereinander.

Als alle Brote gegessen waren, zog der Soldat weiter und ließ ihnen zum Dank fünf Geldstücke zurück. Davon nahm der erste drei Geldstücke, da er drei Brote mitgebracht hatte und der zweite zwei Geldstücke für seine zwei mitgebrachten Brote.

War diese Teilung gerecht? Wenn nicht, schlage eine Teilung vor, welche dir gerechter erscheint und begründe deine Antwort.

(nach Leonardo von Pisa: De duobus hominibus panes habentibus...)



nur für Klasse 11

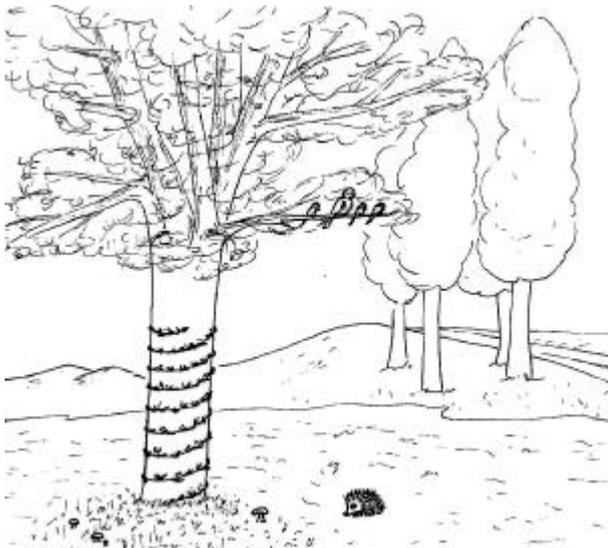
Aufgabe 11
5 Punkte

Geißblatt

Das Geißblatt ist eine Pflanze mit duftenden Blüten aus der Familie der Kaprifoliaceen, welche sich an den Bäumen emporklimmt.

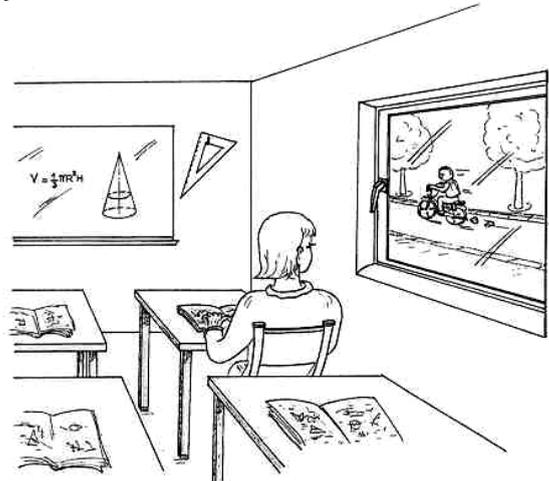
Unser Geißblatt windet sich in einer regelmäßigen Spirale um einen zylindrischen Stamm vom 40 cm Durchmesser. Es umrundet den Stamm 8 mal und erreicht dabei eine Höhe von 12m.

Berechne die Gesamtlänge der Ranke.



Aufgabe 12
7 Punkte

Träumerei



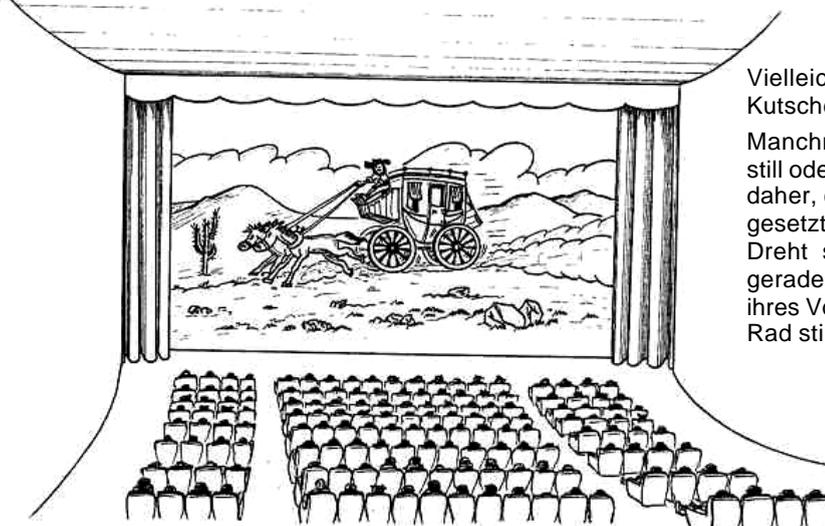
Die Unterrichtsstunde geht zu Ende. Zazie schaut aus dem Fenster und sieht ihren Freund Prosper gerade zwei Sekunden lang, wie er mit dem Motorroller vorbeifährt. Wie schnell er wohl gefahren ist, fragt sie sich.

Zazies Augen haben 1m Abstand vom Fenster, das 1m breit ist. Die Strasse verläuft parallel zur Schulfassade und ist von dieser 25m entfernt.

Beantworte Zazies Frage. Begründe durch eine Rechnung.

Aufgabe 13
10 Punkte

100 Jahre Kino



Vielleicht hast du im Film schon einmal eine Kutsche gesehen, die von Indianern verfolgt wird.

Manchmal sieht es so aus, als stünden die Räder still oder drehten sich sogar rückwärts. Dies kommt daher, dass der Film aus Einzelbildern zusammengesetzt ist, die nacheinander projiziert werden. Dreht sich nun zwischen zwei Bildern das Rad gerade so weit, dass jede Radspeiche die Position ihres Vorgängers eingenommen hat, so scheint das Rad stillzustehen.

Nimm an, das Rad habe 12 Speichen und einen Durchmesser von 1,20m.

Wie groß ist dann die Geschwindigkeit der Kutsche in km/h, wenn die Kamera 24 Bilder pro Sekunde aufgenommen hat?

Gib den Rechenweg an.