Lösungshinweise für den Probewettbewerb 2005/06

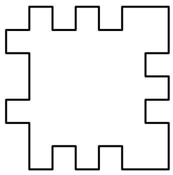
Aufgabe 1: Tor !!!

Da alle Namen außer E… im Bericht vorkommen, ist E… der Erzähler.
Bezeichnet man die Zahl der geschossenen Tore mit den Anfangsbuchstaben der Torschützen, so lassen sich aus dem Bericht die rechts stehenden Aussagen ableiten.
Damit ergibt sich folgende Klassifikation: $\boxed{\mathbf{E < A = B < D < C}}$

$A = E+3$
$C = D+3$
$C = A+5$
$B = E+3$

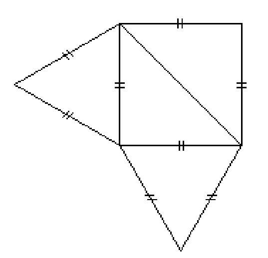
Punktevorschlag: Sprache 4 Punkte, mathematische Argumentation 3 Punkte

Aufgabe 2: Eines fehlt



Punktevorschlag: 2 Punkte Abzug für jede falsche Seitenbegrenzung.

Aufgabe 4: Schief



Die Abbildung zeigt ein mögliches Beispiel.
Punktevorschlag :
0 Punkte bei fehlerhaftem Netz.
Sorgfalt der Ausführung beachten!

Aufgabe 3: Etwa 1000

Sind x und y die Anzahl der Teile an einer der vier Randseiten, so gilt $2x + 2y - 4 = 124$, da man die Eckstücke nicht doppelt zählen darf. Somit ist $x + y = 64$. Unter Beachtung dieser Bedingung ergeben sich die in der Tabelle dargestellten Möglichkeiten. Die tatsächliche Anzahl könnte 999 oder auch 1008 sein.

x	*y*	*xy*
35	29	1015
36	28	1008
37	27	999
38	26	988

Punktevorschlag : « $x + y = 64$ » 3 Punkte; Rest 4 Punkte.

Aufgabe 5 : Gut kombiniert

16 min 45 s = 1005 s. Die richtige Kombination ist die Darstellung von 1004 = 1005-1 im Zwölfersystem, da die Einstellung 0-0-0 bereits eine Sekunde in Anspruch nimmt.
$1004 = 6\times12^2 + 11\times12 + 8$. Die richtige Kombination ist also $\boxed{\mathbf{6 - 11 - 8}}$.

Punktevorschlag: 1 Punkt für die Umwandlung « 1005 s » ; 5 Punkte für « 6-11-9 »; 7 Punkte für « 6-11-8 ».

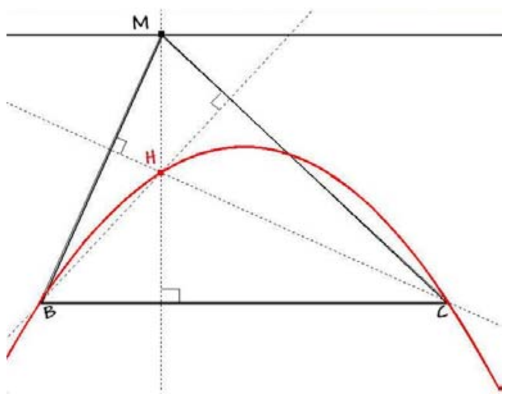
Aufgabe 6 : Platonisch

Sei *k* die Masse einer Kugel und s die Masse eines Stabes. Dann gilt für die Masse des Teraeders $4k + 6s = 76$g und für die Masse des Oktaeders $6k + 12s = 132$g. Aus diesem Gleichungssystem erhält man k = 10g und s = 6g.

Die Masse des Ikosaeders beträgt $12k + 30s$ = 120g + 180g = **300 g**.

Punktevorschlag: 2 Punkte für das Gleichungssystem; 2 Punkte für die Lösung des Systems ; 1 Punkt für die Masse des Ikosaeders.

Aufgabe 7: Höhenlinie



Die Ortslinie des Höhenschnittpunktes ist eine Parabel.

Punktevergabe: im Ermessen des Korrektors . Man beachte, dass die Ortslinie teilweise außerhalb des Dreiecks verläuft.

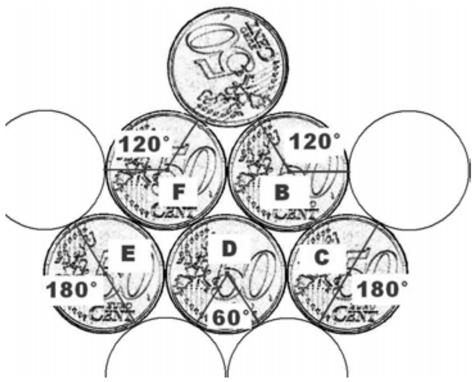
Aufgabe 8 : Auf die Piste!

In einer Stunde bringt der Skilift 900 Skifahrer nach oben auf die Pisten. Da jeder der 150 Sessel 2 Sitzplätze hat, kommt jeder Sessel in einer Stunde dreimal zum Gipfel. Damit dauert eine Berg- und Talfahrt eines Sessels 20 Minuten.

Die Dauer einer Bergfahrt beträgt also 10 Minuten.

Punkteverteilung: Aufgrund der Vielzahl der Lösungsmöglichkeiten liegt sie im Ermessen des Korrektors.

Aufgabe 9 : Eurotour



Rollt die Münze A über einen Bogen mit dem Mittelpunktswinkel α, so beträgt der Drehwinkel der Münze A 2α.

Auf ihrem Weg dreht sich die Münze A also um $2 \cdot 120°$ bei B und F, um $2 \cdot 180°$ bei C und E und um $2 \cdot 60°$ bei D.

Ihr Drehwinkel beträgt also insgesamt $\boxed{1320°}$ ($= 3 \cdot 360° + 240°$).
Das Ganze im Uhrzeigersinn !

Punkteverteilung: „doppelter Winkel" 2 Punkte, richtiger Gesamtwinkel 3 Punkte, Zeichnung mit richtiger Orientierung der Endlage 2 Punkte

Aufgabe 10 : Exit?

Für n = 20 endet das Programm. Für n < 20 verdoppelt man so lange, bis man schließlich n = 20 oder n > 20 erhält. Ist n >20 eine Viererzahl, so führt die fortgesetzte Subtraktion von 4 immer auf n = 20.

Bleibt bei der Division von n > 20 durch 4 der Rest 2, so führt die fortgesetzte Subtraktion von 4 schließlich auf 18 und die anschließende Verdoppelung auf 36, eine Viererzahl.

Bleibt bei der Division von n > 20 durch 4 der Rest 1 oder 3, so führt die fortgesetzte Subtraktion von 4 auf 17 oder 19. Bei der anschließenden Verdoppelung erhält man eine gerade Zahl, die sich, wie bereits gezeigt, auf 20 zurückführen lässt.

Egal welcher Startwert also gewählt wird, n wird durch dieses Programm immer auf 20 reduziert.

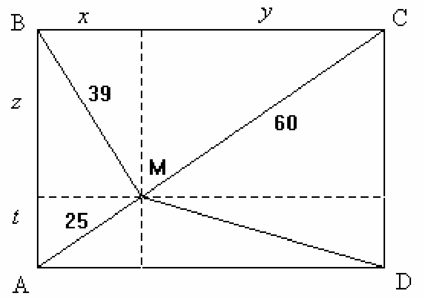
Punkteverteilung: 1 Punkt pro Test ; 1 Punkt für „Endergebnis ist immer 20" ; 6 Punkte für Erklärung (Beweis).

Aufgabe 11 : ab 2005

$(a + b) + ab + (a - b) = 2005 \Leftrightarrow 2a + ab = 2005 \Leftrightarrow a\,(2 + b) = 2005$.
Die einzigen Teiler von 2005 sind : 1 ; 5 ; 401 ; 2005.
Mit $a > b > 0$, ist die einzige Lösung $a = 401$ und $2+b = 5$, also : $\boxed{\mathbf{a = 401 \text{ und } b = 3}}$

Punkteverteilung: 2 Pkte für „$a(2+b) = 2005$" ; 1 Pkt für die Teiler von 2005 ; 2 Pkte für die Schlussfolgerung

Aufgabe 12 : Abstandsorakel



Durch Anwendung des Satzes von Pythagoras in den 4 rechtwinkligen Dreiecken, erhält man folgende Gleichungen:

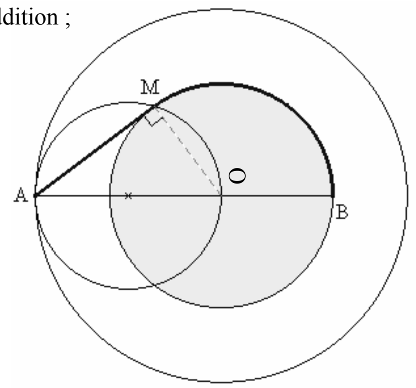
$x^2 + z^2 = 39^2 = 1521$; $y^2 + z^2 = 60^2 = 3600$
$x^2 + t^2 = 25^2 = 625$; $y^2 + t^2 = MD^2$

Addition der vier Gleichungen ergibt

$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2 = MD^2 + 5746$
$2\,(x^2 + t^2 + y^2 + z^2) = MD^2 + 5746$
$2\,(625 + 3600) = MD^2 + 5746 \Rightarrow MD = 52$. **Der Abstand des Schlosses zu Dorf D beträgt 52 Meilen.**

Punkteverteilung: 2 Punkte für die 4 pythagoräischen Gleichungen ; 3 Punkte für die Addition ;
2 Punkte für MD² und MD

Aufgabe 13 : Hungrige Schnecke



Sei R der äußere und r der innere Radius. Die kürzeste Strecke ist die Bahn AMB entlang der Strecke AM und des Kreisbogens MB (siehe Abb.)
Im Dreieck AMO, gilt nach Pythagoras : $AM^2 + r^2 = R^2$ und damit AM = 60 cm.
Andererseits ist $\cos(\angle MOA) = r/R = 0{,}6$ also $\angle MOA \approx 53{,}13°$.
$\angle BOM \approx 180° - 53{,}13° \approx 126{,}87°$.
Länge des Bogens MB $\approx \pi \cdot r \cdot 126{,}87°/180° \approx 99{,}64$ cm.
Die Länge des kürzesten Weges, den die Schnecke einschlagen könnte, ist also ungefähr 160 cm.

Punkteverteilung 2 Pkte für den richtigen Weg (durch eine Zeichnung oder eine Erklärung) ; 2 Punkte für AM;
2 Punkte für $\angle MOA$; 1 Punkt für $\angle BOM$; 2 Punkte für die Länge des Kreisbogens MB ; 1 Pukt für die Gesamtlänge.