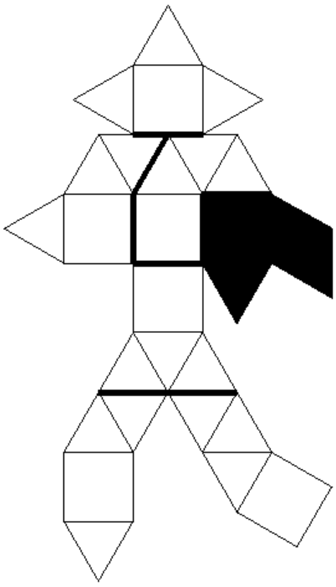
Probewettbewerb 2006/2007 Lösungshinweise

Aufgabe1: Halb leer oder halb voll?

Es genügt, die Höhe des Flüssigkeitsstandes zu markieren. In der Abbildung ist er z.B. durch den Buchstaben E des Etiketts gekennzeichnet. Dreht man die Flasche um, so befindet sich die Flüssigkeit dort, wo vorher Luft war. Steht nun der Flüssigkeitsspiegel unterhalb der Markierung, so ist weniger Flüssigkeit als Luft in der Flasche, und damit auch weniger als 0,5 l. Befindet dich dagegen der Flüssigkeitsspiegel nach dem Umdrehen oberhalb der Markierung, so enthält die Flasche mehr als 0,5 l Flüssigkeit.

Aufgabe 2: Eins zu viel

Hier die einzige Lösung:



Das überzählige Stück ist dunkel.

Aufgabe 3: Recycling

Bei einem Jahr mit 365 Tagen verschiebt sich der Kalender um einen Wochentag, denn es gilt 356 = 52 · 7 + 1. Bei einem Schaltjahr beträgt die Verschiebung ab dem 1. März zwei Wochentage. Wegen des Schaltjahrs 2008 ergibt sich für den 1. Januar 2012 eine Verschiebung um 7 Wochentage. Das Jahr 2012 ist aber im Gegensatz zu 2006 ein Schaltjahr, so dass der Kalender nicht verwendbar ist. Erst nach weiteren 5 Jahren (2 Schaltjahre), also im Jahr 2017 stimmen die Wochentage mit dem Kalender des Jahres 2006 überein.

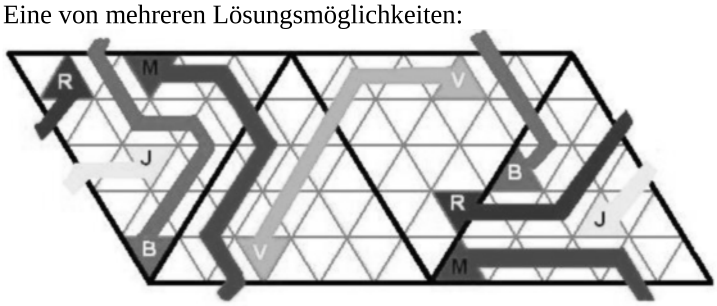
Aufgabe 4: Neunmalklug

$$10^{2006}-2006=(10^{2006}-1)-2005=\underbrace{9999...99999}_{2006\text{ chiffres }9}-2005=\underbrace{9999...999}_{2002\text{ chiffres }9}7994\ .$$

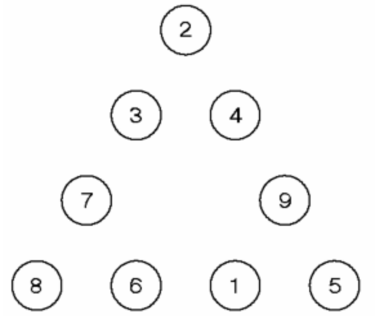
Die Quersumme ist: $2002 \times 9 + 7 + 9 + 9 + 4 =$ **18 047**.

Aufgabe 5: Der Weg ist das Ziel

Eine von mehreren Lösungsmöglichkeiten:



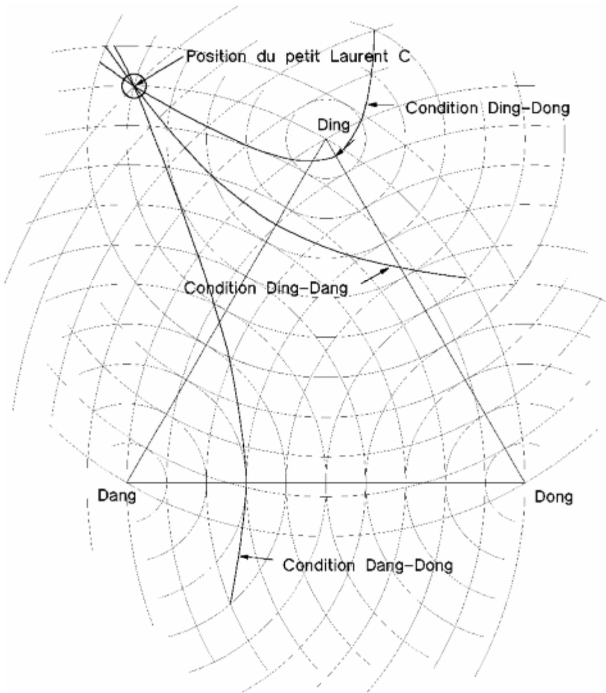
Aufgabe 6: Magisch hoch 2



Die Dreieckseiten der anderen Lösungen enthalten jeweils die gleichen Ziffern.

Aufgabe 7: Schlag Mitternacht

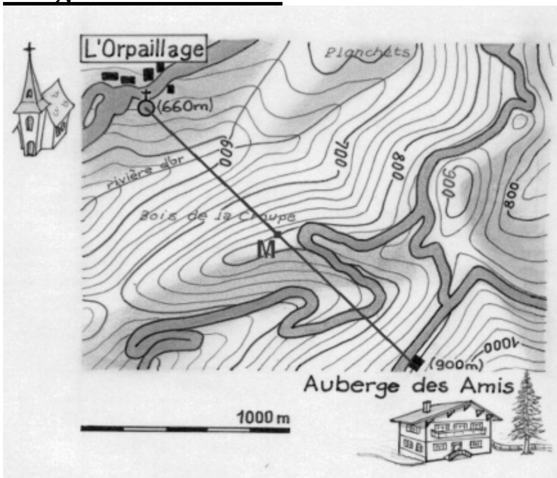
Die Position von Laurent lässt sich näherungsweise ermitteln, wenn man die angedeuteten Kreise in der Abbildung des Aufgabenblattes weiterführt. Die Kreise „Ding +5“, „Dang+10“ und „Dong+14“ schneiden sich im Rahmen der Zeichengenauigkeit in einem Punkt. Die in der nebenstehenden Abbildung eingezeichneten Hyperbeläste werden nicht erwartet.



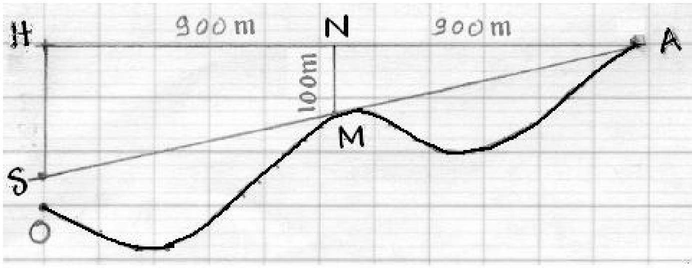
Aufgabe 8: Vis-à-vis

Hier die 24 Zahlen, welche die Bedingungen erfüllen:
60009 ; 60809 ; 66099 ; 66899 ; 68089 ; 68889 ; 69069 ; 69869
80008 ; 80808 ; 86098 ; 86898 ; 88088 ; 88888 ; 89068 ; 89868
90006 ; 90806 ; 96096 ; 96896 ; 98086 ; 98886 ; 99066 ; 99866.

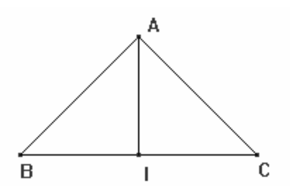
Aufgabe 9: Ausblick



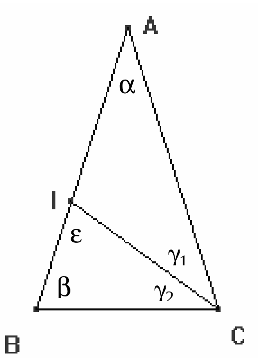
Sei A die Position des Beobachters bei der Auberge des Amis, M der Punkt der in Blickrichtung zur Kapelle auf dem Grat von La Croupe liegt und O der Fußpunkt der Kapelle. Durch senkrechte Projektion der Punkte O und M auf die Horizontale durch A erhält man die Punkte H und N. Die Sichtlinie von A über M führt zum Punkt S. Mit Hilfe der aus der Karte ersichtlichen Entfernungen und Höhenangaben erhält man über den Strahlensatz HS=200m. und damit OS=40m.
Man könnte die Turmspitze der Kapelle also nur bei einer Turmhöhe von über 40m sehen, was allerdings unwahrscheinlich ist.



Aufgabe 10: Zerlegungstreu



Fall 1 :
Die Winkelhalbierende halbiert den Winkel an der Spitze. Dann entstehen durch die Zerlegung zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke. Sie sind genau dann gleichschenklig, wenn die Weite des Basiswinkels 45° beträgt. Das Ausgangsdreieck ist dann ebenfalls rechtwinklig und ist leicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.



Fall 2: Die Winkelhalbierende halbiert einen Basiswinkel. Ist das Dreieck AIC gleichschenklig, dann gilt $\gamma_1 = \gamma_2 = \alpha$ und wegen der Gleichschenkligkeit von Dreieck ABC $\beta = 2\alpha$. Damit gilt $\alpha+\beta+\gamma = 5\alpha = 180°$ und damit $\alpha = 36°$ und $\beta = 72°$. Aus $\gamma_2 = \alpha = 36°$ und $\beta = 72°$ folgt $\varepsilon = 36°$. Damit ist das Dreieck BCI ebenfalls gleichschenklig. Dieses Dreieck und das Ausgangsdreieck ABC sind Goldene Dreiecke, die ebenfalls mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, was aber in der Aufgabe nicht verlangt ist.
Weitere Fälle sind nicht möglich, es gibt also nur die beiden Arten zerlegungsgleicher Dreiecke.

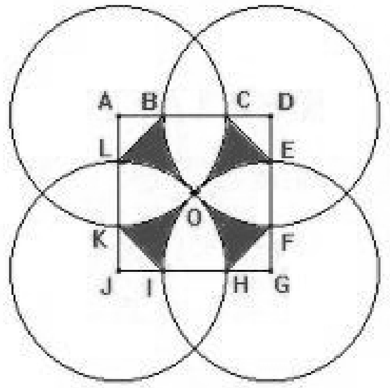
Aufgabe 11: Quadratsummen

Sei n die Seitenlänge des mittleren Quadrats.
Dann ist der Flächeninhalte des jeweiligen Ausgangsquadrats $(n-2)^2$, $(n-1)^2$, n^2 , $(n+1)^2$ und $(n+2)^2$.
Aus der Gleichheit der beiden großen Quadrate erhält man $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2$
und daraus $n^2 - 12n = 0$. Wegen $n>0$ folgt $\boldsymbol{n = 12}$.

Aufgabe 12: Existenzfrage

Da die Seitenlängen des Dreiecks positiv sein müssen gilt zunächst $-0{,}5 < x < 12$.
$(2 + x) + (1 + 2x) > 12 - x \Rightarrow x > 2{,}25$; $(2 + x) + (12 - x) > 1 + 2x \Rightarrow x < 6{,}5$.
$(1 + 2x) + (12 - x) > 2 + x \Rightarrow 13 + x > 2 + x$. Diese Ungleichung ist allgemeingültig.
Insgesamt ergibt sich also $\boldsymbol{2{,}25 < x < 6{,}5}$.

Aufgabe 13: Malteserkreuz



Aus der Seitenlänge 8 des Ausgangsquadrats erhält man $\overline{AC} = \overline{BD} = \overline{AO} = 4\sqrt{2}$.
Damit ist $\overline{AB} = \overline{CD} = 8 - 4\sqrt{2}$ und somit $\overline{BC} = \overline{AD} - 2\overline{AB} = 8\sqrt{2} - 8$.
Da die Radien der vier Kreise gleich sind, folgt $\overline{AL} = \overline{AB}$.
Das Dreieck ALB ist damit gleichschenklig und rechtwinklig. Es gilt also
$\overline{BL} = \sqrt{2} \cdot \overline{AB} = 8\sqrt{2} - 8 = \overline{BC}$. Aus $\angle ABL = 45°$ folgt $\angle LBC = 135°$.
Aus der Symmetrie der Ausgangsfigur ergibt sich die Gleichheit der anderen Seiten des Achtecks und die Gleichheit der anderen Innenwinkel.
Das Achteck ist also regelmäßig.

Probewettbewerb 2006/2007	Bewertungsvorschläge

Aufgabe1: Halb leer oder halb voll? 7 Punkte

Bewertung von sprachlicher und mathematischer Qualität zu etwa gleichen Teilen.

Aufgabe 2: Eins zu viel, 5 Punkte

Darstellung der Figur 3 Punkte, überzähliges Teil 2 Punkte.
Ziel ist die systematische Untersuchung der möglichen Konfigurationen aus einem Quadrat und 3 Dreiecken.

Aufgabe 3: Recycling, 7 Punkte

Für die Antwort 2017 mit guter Erklärung: 7 Punkte.
Teilpunkte: Verschiebung um einen Tag: 1 Punkt. Verschiebung bei einem Schaltjahr: 1 Punkt.
Für die Antwort „2012“: 2 weitere Punkte.

Aufgabe 4: Neunmalklug, 5 Punkte

Richtige Antwort: 3 Punkte, Begründung 2 Punkte.

Aufgabe 5: Der Weg ist das Ziel, 7 Punkte

Aufzeichnen des Netzes mit dem Dreiecksraster: 1 Punkt
Bei vier richtigen Verbindungswegen und Netz 3 Punkte
Besonderes Augenmerk erfordern die Anschlussstellen am Rand des Netzes.

Aufgabe 6: Magisch hoch 2, 5 Punkte

Falls nur eine der beiden Bedingungen erfüllt ist: 2 Punkte. Man achte auch auf die Darstellung.

Aufgabe 7: Schlag Mitternacht, 7 Punkte

Zeichnung des gleichseitigen Dreiecks im richtigen Maßstab 1 Punkt. Das Netz der konzentrischen Kreise soll fortgesetzt und verwendet werden. Wenn der Ort von Laurent ungefähr gefunden wird, kann man zwischen 0 und 4 Punkten geben, je nach Genauigkeit des gefundenen Ortes.
2 Punkte verbleiben für das Erklären der Vorgehensweise.

Aufgabe 8: Vis-à-vis, 5 Punkte

Für jeweils 8 Zahlen einen Punkt. Zwei Bonuspunkte bei vollständiger Lösung.

Aufgabe 9: Ausblick, 7 Punkte

Wahl einer geeigneten Lösungsstrategie: bis 2 Punkte. Richtig begründete Antwort: 4 Punkte.
Berücksichtigung der Höhe des Glockenturms: 1 Punkt.

Aufgabe 10: Zerlegungstreu, 10 Punkte

Unterscheidung der beiden Fälle: 1 Punkt

Rechtwinkliges, gleichseitiges Dreieck: 3 Punkte (Konstruktion mit Zirkel und Lineal).
Zweites Dreieck mit Winkelberechnung: 5 Punkte. Begründung der Nichtexistenz weiterer Dreiecke: 1 Punkt.

Klassenstufe 11:

Aufgabe 11: Quadratpuzzles, 5 Punkte

Richtig aufgestellte Gleichung: 2 Punkte. Lösen der Gleichung und richtige Antwort: 3 Punkte.
Die Herstellung der Puzzles ist nicht verlangt. Dies wäre um vieles schwieriger.

Aufgabe 12: Existenzfrage, 7 Punkte

Aufstellen der Dreiecksungleichungen: je 1 Punkt.
Lösen des Ungleichungssystems: 3 Punkte.
Positive Seitenlängen: 1 Punkt.

Möglicherweise wird auch versucht, die Lösung durch Probieren zu finden. Auch hier können nach Ermessen des Korrektors Teilpunkte vergeben werden.

Aufgabe 13: Malteserkreuz, 10 Punkte

Umsetzung der Konstruktionsbeschreibung, Zeichnung, Färbung des Malteserkreuzes: 2 Punkte.
Nachweis gleich langer Seiten : 5 Punkte (Rechnung mit genauen Werten).
Nachweis gleich groβer Innenwinkel oder Mittelpunktswinkel: 3 Punkte.

Bemerkung: Man kann auch zeigen, dass das Achteck einen Umkreis besitzt. Diese Feststellung ersetzt den Nachweis gleich großer Winkel