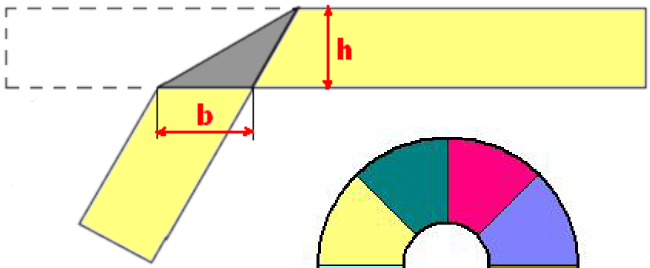
Mathematik ohne Grenzen 2008/2009 **Lösungshinweise**
Probewettbewerb

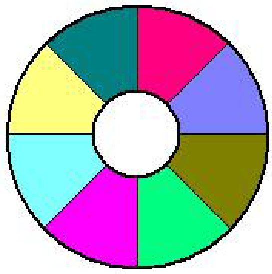
Aufgabe 1: Vielleicht? (7 Punkte)

Von 000 bis 999 gibt es 1000 mögliche Zahlencodes für das Fahrradschloss. Mit 2 Sekunden pro Versuch kann sie in 30 Minuten 900 Zahlencodes testen. Die Wahrscheinlichkeit, den richtigen Code innerhalb einer halben Stunde zu finden, beträgt also 90%.

Aufgabe 2: Gefaltet (5 Punkte)



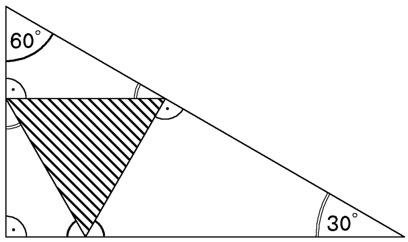
Der Flächeninhalt des Dreiecks ist
A =0,5·b·h (siehe Abb.).
Die Höhe dieses Dreiecks ist konstant und gleich der Breite des Papierstreifens.
Der Flächeninhalt wird am kleinsten, wenn die Grundseite am kürzesten, also gleich der Breite des Papierstreifens ist.
Das Dreieck mit dem kleinsten Inhalt muss also rechtwinklig und gleichschenklig sein.



Aufgabe 3: Logo (7 Punkte)

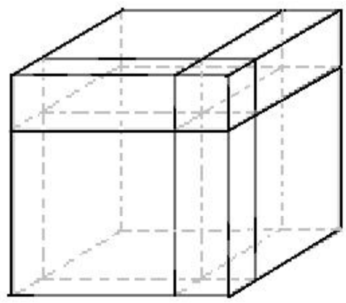
Die Kreisfläche in der Mitte und jeder der 8 Sektoren haben gleiche Flächeninhalte. Die Fläche des großen Kreises ist also 9-mal so groß wie die des kleinen Kreises. Der Radius des großen Kreises ist damit dreimal so groß wie der des kleinen Kreises, also 6 cm.

Aufgabe 4: Eins für drei (5 Punkte)



Bis auf Symmetrie ist das abgebildete Dreieck die einzige Lösung (Nachweis nicht verlangt).

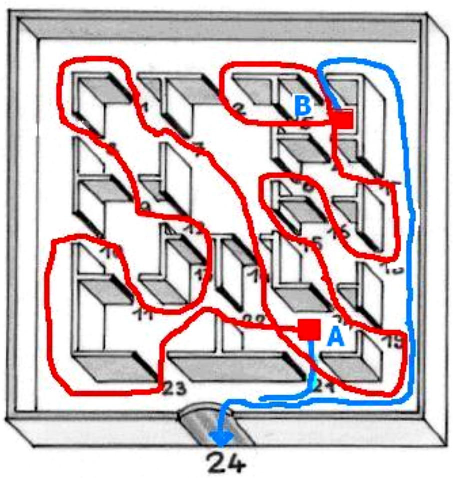
Aufgabe 5: Hoch 3 (7 Punkte)



Hier die räumliche Darstellung einer solchen Anordnung. Sieben der acht Körper sind sichtbar. Der Würfel mit der Kantenlänge a ist verdeckt.
Durch die Anordnung wird folgende Gleichung veranschaulicht:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

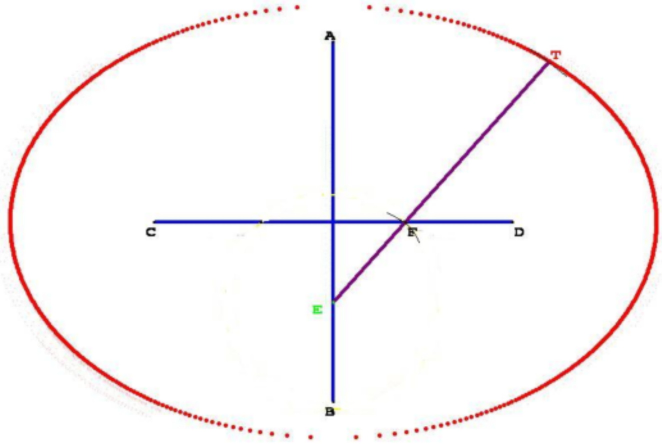
Aufgabe 6: Labyrinth (5 Punkte)



Die Räume mit einer geraden Anzahl von Türen (auch der Bereich zwischen Außenmauer und Innenräumen) können weder Beginn noch Ende des Parcours sein.
Es gibt zwei Räume A und B mit ungerader Türenzahl.
Man geht zum Beispiel nach A und betätigt dann einen Knopf um alle inneren Türen zu öffnen. Dann geht man nacheinander durch alle Türen, bis man schließlich durch die letzte offene Tür Raum B betritt. Nun sind alle Türen geschlossen und Tür Nr. 24 öffnet sich. Drückt man jetzt den RESET-Knopf , so öffnen sich auch die inneren Türen und man kann das Labyrinth verlassen.

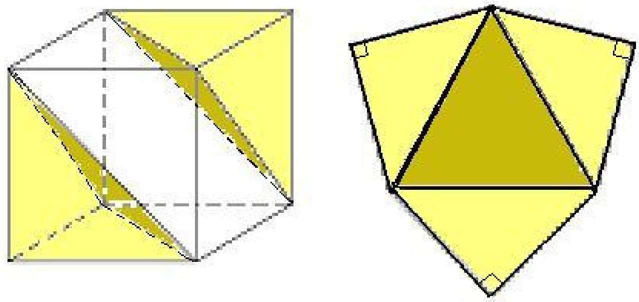
Aufgabe 7: Irre Maschine (7 Punkte)

Durch eine punktweise Konstruktion erhält man eine Ellipse mit den Halbachsen a = 9 cm und b = 6 cm.



Aufgabe 8: Drei für einen (5 Punkte)

Der gegebene Körper ist ein Antiprisma, das gemäß der Abbildung durch zwei Pyramiden zu einem Würfel ergänzt werden kann. Rechts daneben ist das Netz einer solchen Pyramide dargestellt.

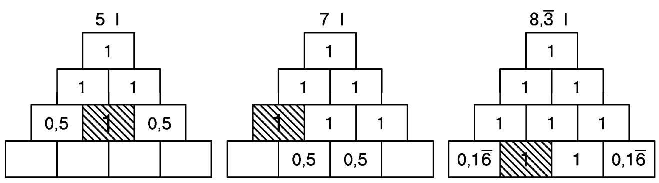


Aufgabe 9: Ticktacktaktik (7 Punkte)

Der Gangunterschied der Uhren vergrößert sich pro Stunde um drei Minuten. Wenn der Gangunterschied sich auf 12 h = 240·3 min summiert hat, zeigen beide Uhren wieder die gleiche Uhrzeit an. Dies ist nach 240 Stunden oder 10 Tagen der Fall.

Aufgabe 10: Überfluss (10 Punkte)

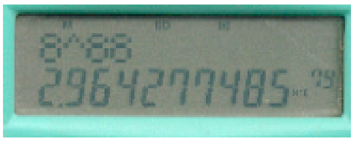
Zum Füllen von Schale 1 ist 1 Liter notwendig. Ist sie gefüllt, fließt das Wasser zu gleichen Teilen in die Schalen 2 und 3. Um 2 und 3 zu füllen müssen insgesamt **3 Liter in Schale 1** fließen.
Von jedem weiteren Liter der in Schale 1 fließt geben die Schalen 2 und 3 jeweils 1/4 Liter nach links und rechts ab, so dass in den Schalen 4 und 6 jeweils ¼ Liter, in Schale 5 dagegen 1/2 Liter landet. Um **Schale 5** zu füllen müssen also **2 weitere Liter** und damit **insgesamt 5 Liter in Schale 1** geflossen sein.
Um auch **Schale 4** zu füllen benötigt man **zwei weitere Liter**, sodass **insgesamt 7 Liter** in Schale 1 fließen müssen. Da jedoch Schale 5 bereits voll ist, fließt davon jeweils 1/2 Liter in die Schalen 8 und 9.
Die Schalen 4, 5 und 6 sind nun ebenfalls gefüllt. Von der Wassermenge die jetzt noch in die Schale 1 fließt, erhält Schale 8 noch 1/8 von Schale 4 und 1/4 von Schale 5 also insgesamt 3/8. Da in Schale 8 noch ½ Liter fehlt, gilt 3/8·x = 1/2 und damit x = 4/3



Bis also **Schale 8 voll** ist müssen **$8^1/_3$ Liter in Schale 1** geflossen sein.

Klassenstufe 11

Aufgabe 11: Oktomanie (5 Punkte)



Gibt man 8^{88} in den Taschenrechner ein, so erhält man den Näherungswert $2{,}9643.. \times 10^{79}$. In der Dezimalschreibweise hat die Zahl 8^{88} also 80 Ziffern, beginnend mit der Ziffer 2.
Betrachtet man die Endziffern der ersten Potenzen von 8, so erhält man 8, 4, 2, 6 und dann wieder 8. Die Folge der Endziffern ist also periodisch, wobei sich für alle durch 4 teilbaren Exponenten die Endziffer 6 ergibt.

Der Zugangscode lautet also 2806.

Aufgabe 12: Offene Schuhe (7 Punkte)

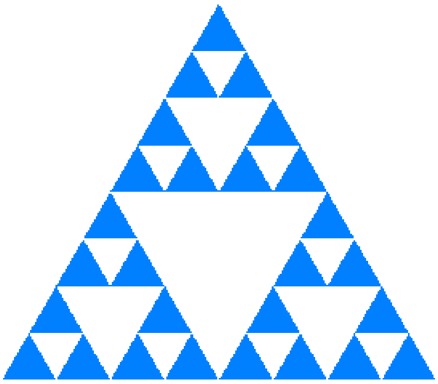
Die schräg verlaufenden Abschnitte lassen sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras ausdrücken. Für die Länge der Schnürsenkel (ohne die freien Enden) erhält man

$$B = 7a+7\sqrt{1+a^2}+\sqrt{49+a^2} \quad ; \quad C = 7a+2+6\sqrt{4+a^2} \quad ; \quad D = 7a+7+7=7a+14$$

Wegen a > 0 gilt: $\sqrt{1+a^2}>1$; $\sqrt{49+a^2}>7$ und $\sqrt{4+a^2}>2$.

Es gilt also $B > 7a+7+7=7a+14$ und $C > 7a+2+6\cdot 2 = 7a+14$.
Damit hat Dunia die kürzesten Schnürsenkel. Ein Vergleich von B und C ist nicht verlangt.

Aufgabe 13: Sierpinski (10 Punkte)



Mit jeder Stufe verlieren die Dreiecke 1/4 ihrer Fläche. Die Flächeninhalte bilden eine geometrische Folge und es gilt

$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0$$

$$\frac{A_3}{A_0} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^8 = \frac{6561}{65536} \approx 0{,}1$$

Für Stufe 8 erhält man rund 10% des ursprünglichen Flächeninhalts.