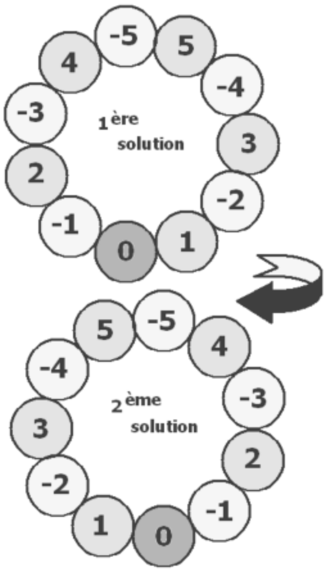
Mathematik ohne Grenzen 2009/2010

Lösungshinweise zum Probewettbewerb



Aufgabe 1 – Remember (7 Punkte):

Gilles, Irene und Jeanne haben keine Schwester und deshalb auch auch nicht dieselbe Mutter.
Gilles hat einen Bruder. Dies kann nur François sein, da Hector und Emile im Gegensatz zu Gilles eine Schwester haben. Da Anne keine Töchter hat, muss sie die Mutter von Gilles und Francois sein.
Weil Beatrice die meisten Kinder hat, Irene aber ein Einzelkind ist, muss sie die Mutter von Emile, Hector und Jeanne sein.
Cloé ist die Mutter von Irene.

Aufgabe 2 – Gut eingefädelt (5 Punkte):

Die Null muss zwischen -1 und 1 liegen. Dadurch sind auch die Positionen der anderen Zahlen festgelegt. Es gibt zwei zueinander symmetrische Anordnungen. Berücksichtigt man, dass die Kette von beiden Seiten betrachtet werden kann, umfasst eine einzige Anordnung beide Lösungen.

Aufgabe 3 – Design (7 Punkte):

Sei a die Seitenlänge der kleinen, dunklen Quadrate und x die Seitenlänge der großen Quadrate. Den Inhalt der helleren Flächen erhält man, wenn man vom Flächeninhalt der großen Quadrate den doppelten Flächeninhalt der kleinen Quadrate abzieht. Es gilt also
$6x^2 - 14a^2 = 40 \cdot 7a^2$ und damit $x = 7a$.

Aufgabe 4 – Und sie dreht sich doch! (5 Punkte):

Die Platte kann sich nur dann drehen, wenn ihre Diagonale $d < 35$ cm ist. Bei einer quadratischen Platte der Seitenlänge $a = 25$ cm ist $d > 35$cm, bei einer rechteckigen Platte, deren Seitenlängen zum Beispiel 30 cm und 18 cm betragen ist dagegen $d < 35$ cm.

Aufgabe 5 – Letztes Drittel (7 Punkte):

Um aus neun Münzen die leichtere herauszufinden, teilt man die Münzen in drei gleich große Haufen.

Legt man zwei der drei Haufen auf die beiden Seiten der Balkenwaage, so lässt sich mit einer Wägung der Haufen mit der leichteren Münze ermitteln:

Ist die Waage im Gleichgewicht, so befindet sich die leichtere Münze im dritten Haufen, falls nicht, liegt sie im leichteren der beiden ersten Haufen. Da jeder Haufen aus drei Münzen besteht, kann man die leichtere Münze durch eine weitere Wägung nach demselben Prinzip ermitteln.

Bei n Münzen muss man diese so in drei Haufen aufteilen, dass man mit einer Wägung den Haufen mit der leichteren Münze ermitteln kann. Geht die Teilung auf, so erhält man drei Haufen mit p Münzen. Geht sie nicht auf, so bleiben eine oder zwei Münzen übrig und man erhält $n = 2p + (p+1)$ oder $n = 2(p+1)+p$.

Selbst wenn sich die leichtere Münze immer im größeren Haufen befindet, kommt man bei 2009 Münzen mit sieben Wägungen aus:

$2009 = 670+670+669$; $670 = 223 + 223 + 224$; $224 = 75 + 75 + 74$;

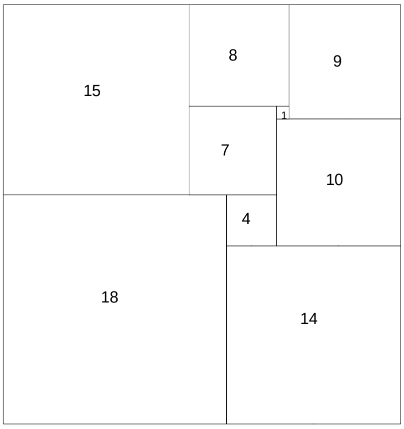
$75 = 25 + 25 + 25$ $25 = 8 + 8 + 9$ $9 = 3 + 3 + 3$ $3 = 1 + 1 + 1$.

Aufgabe 6 – Öl für zwei (5 Punkte):

8	8	3	3	6	6	1	1	4	
5	0	5	2	2	0	5	4	4	
3	0	0	3	0	2	2	3	0	

Aufgabe 7 – Patchwork (7 Punkte):

Der Flächeninhalt der 9 Teilquadrate beträgt insgesamt 1056 cm². Länge und Breite des Rechtecks müssen jeweils mehr als die Seitenlänge des größten Quadrats betragen, als größer als 18 cm sein. Zerlegt man 1056 in zwei Faktoren, so erhält man als einzig passendes Format 32 cm $\times$ 33 cm. Daraus ergibt sich die abgebildete Anordnung.



Aufgabe 8 – Begrüßungsküsschen (5 Punkte):

Aus der Auvergne kommen a, aus der Bretagne b und aus Katalonien c Personen. Dann gilt

(1) $a + b + c = 10$

(2) $2ab + 3bc + 2ac = 75$

Durch Probieren erhält man a = 4, b = 3 und c = 3. Nachweis durch Einsetzen in (2).

Eindeutigkeit der Lösung (nicht verlangt):
Umformen von (2) ergibt:

(3) $2a(b + c) = 3(25 – bc)$

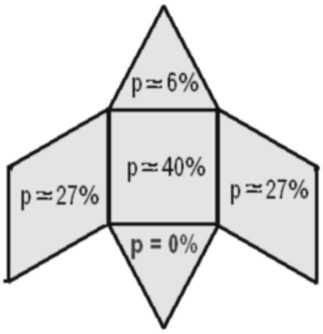
Wie man sieht, muss a(b + c) durch 3 und 25 - bc durch 2 teilbar sein. Letzteres geht nur, wenn bc ungerade ist. Außerdem dürfen a, b und c nicht größer als 5 sein.
Für **a = 3** erhält man aus (1) b+c = 7 und damit bc = 12 (gerade).
Für **b + c = 6** ist a = 4. Für die Werte von b und c gibt es 2 Fälle:

- Fall1: b + c = 1 + 5 = 5 + 1 ⇨ bc = 5. Gleichung (3) wird jedoch nicht erfüllt.
- **Fall2: b + c = 3 + 3 erfüllt alle Bedingungen**.

Für **b + c = 9**, ist b + c = 4 + 5 = 5 + 4 ⇨ bc = 20 (gerade).
Somit ist a = 4, b = 3, c = 3 die einzige Lösung.

Aufgabe 9 – Pentaeder (7 Punkte):

Die Abbildung zeigt das Netz des Körpers mit einer möglichen Häufigkeitsverteilung. Natürlich können die Werte der Schüler bei 100 Würfen spürbar von den angegebenen Werten abweichen.
Bemerkenswert ist die Häufigkeit 0 bei einer der Seitenflächen, was daran liegt, dass der Körper auf dieser Fläche keine stabile Lage einnimmt. Die senkrechte Projektion des Schwerpunkts auf eine horizontale Unterlage liegt in diesem Fall außerhalb der Standfläche.



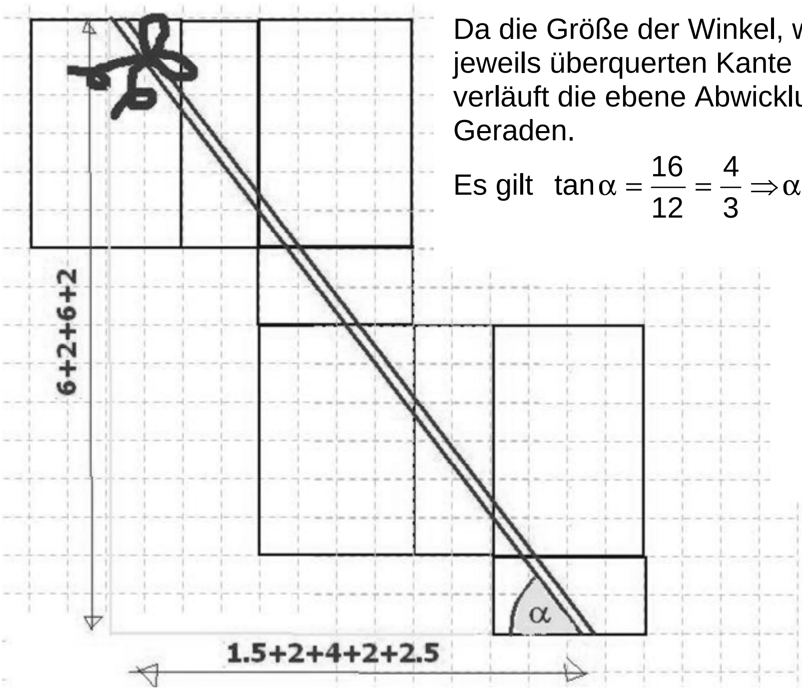
Aufgabe 10 – Diagonal (10 Punkte):

Durch die beiden Kreuzungspunkte der Kanten wird die Diagonale in drei gleich lange Abschnitte zerlegt. Jeder Abschnitt ist Diagonale eines Teilrechtecks aus Teppichfliesen. Der gesamte Fußboden lässt sich in 9 solche Teilrechtecke zerlegen.
Jeder Diagonalenabschnitt überquert 12 Fliesen. Beim Übergang zu einer Nachbarfliese wird entweder eine vertikale oder eine horizontale Fliesenkante geschnitten. Insgesamt gibt es 11 solcher Schnittpunkte. Bezeichnet man die Schnittpunkte von vertikalen und horizontalen Kanten mit *a* und *b*, so gilt a + b = 11. Die Anzahl der Fliesen des zugehörigen Teilrechtecks beträgt $(a + 1)\cdot(b + 1)$. Sie wird für (a/b) = (5/6) bzw. (a/b) = (6/5) maximal und beträgt 42.
Der gesamte Fußboden ist also maximal $9\cdot 42 = 378$ Fliesen belegt.

Aufgabe 11 – Warm und kalt (5 Punkte):

Seit Ende des Stromausfalls sind 1,25 Stunden vergangen. Sei t die Dauer des Stromausfalls in Stunden. Dann gilt die Gleichung
$-18 + 0{,}5 \cdot t - 2 \cdot 1{,}25 = -17$. Daraus folgt $\mathbf{t = 7}$.
Der Stromausfall hat also 7 Stunden gedauert.

Aufgabe 12 – Weihnachtspäckchen (7 Punkte):

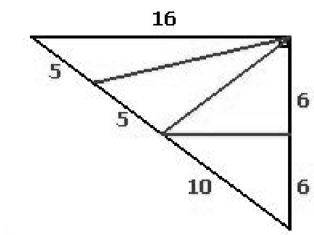


Da die Größe der Winkel, welche das Band mit der jeweils überquerten Kante bildet, gleich groß sind, verläuft die ebene Abwicklung des Bandes längs einer Geraden.

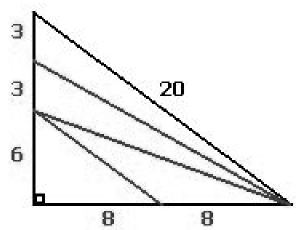
Es gilt $\tan\alpha = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha \approx 53°$

Aufgabe 13 – Zorro ist wieder da! (10 Punkte):

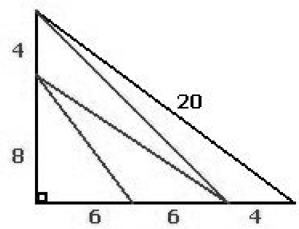
Es gibt insgesamt 12 Arten ein Dreieck in der angegebenen Weise zu zerlegen. Hier sind drei Beispiele:



Zerlegung des Ausgangsdreiecks durch die Seitenhalbierende der Hypotenuse in zwei flächengleiche Teile.
Die beiden Teildreiecke werden durch jeweils eine Seitenhalbierende nochmals halbiert.



Gleiches Prinzip, doch man beginnt mit der Seitenhalbierenden einer Kathete.



Ausgehend vom oberen Eckpunkt trennt man ein Viertel der Dreiecksfläche ab (4:16), dann ein Drittel des größeren Teildreiecks (4:12).
Das verbliebene Dreieck wird durch eine Seitenhalbierende in zwei flächengleiche Dreiecke zerlegt.