

**ACADEMIE
DE STRASBOURG**

Institut de Recherche de
l'Enseignement des
Mathématiques
Inspection Pédagogique
Régionale de
Mathématiques
6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

Ein Klassenwettbewerb für die Jahrgangsstufen 10 und 11

Mathematik ohne Grenzen

**13. März
2001**



- Für jede Aufgabe, auch für nicht gelöste, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.
- Auch Teillösungen werden berücksichtigt.
- Die Darstellung wird mitbewertet.

**Aufgabe 1
7 Punkte**

Noch ein Trick

Die Lösung dieser Aufgabe muss in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter enthalten.

Nicolas montre à François un éventail de 25 cartes toutes différentes. Il lui demande d'en choisir une sans la révéler.

Il place les 5 premières cartes sur une ligne, puis il pose les 5 cartes sur les précédentes et ainsi de suite jusqu'à former 5 tas de 5 cartes.

François doit désigner le tas où se trouve la carte qu'il a choisie. Nicolas ramasse les 5 tas en plaçant celui que François a montré au milieu du paquet. Puis il redistribue les cartes de la même manière pour former à nouveau 5 tas de 5 cartes.

François indique à nouveau le tas où se trouve maintenant la carte choisie. Nicolas montre alors cette carte.

Expliquer ce tour.

Nicola mostra a Francesco un ventaglio di 25 carte tutte diverse e gli chiede di sceglierne una senza mostrargliela.

Dispone le prime 5 carte in riga, poi altre 5 sulle precedenti in successione e così di seguito fino ad ottenere 5 file di 5 carte ognuna.

Francesco deve indicare la fila in cui si trova la carta scelta; Nicola raccoglie ogni fila ponendo le carte di quella indicata da Francesco al centro del mazzo. Poi ridistribuisce le carte nello stesso modo per formare altre 5 file di 5 carte.

Francesco indica di nuovo la fila in cui si trova ora la carta scelta in precedenza. A questo punto Nicola è in grado di rivelare questa carta.

Spiegare il procedimento.

Nick fans out in front of Francis a deck of twenty-five cards all of which are different. Nick then asks Francis to pick one without showing its face.

Nick then sets out the first five cards in a line and places the next five on top of the first five until he gets five five-card packs.

Francis is then asked to point at the pack that includes the card he first picked. The next thing Nick does is to collect the five packs, placing the one Francis pointed at in the middle of the full pack. He then deals out the cards as before until he gets the five five-card packs again.

For the second time, Francis is asked to point at the pack that includes the card he had originally

picked. Nick is then able to show him which card it was.

Explain the trick.

Nicolás le enseña a Francisco un abanico de 25 cartas, todas diferentes. Le pide que escoja una sin enseñársela.

Alinea las 5 primeras cartas de la baraja, luego coloca las 5 siguientes sobre las precedentes y así sucesivamente hasta formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco debe señalar la fila donde está la carta que ha escogido. Nicolás recoge las 5 pilas, colocando la que ha señalado Francisco en el medio de la baraja. Luego reparte las cartas de la misma manera para volver a formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco señala de nuevo la pila donde se encuentra ahora la carta escogida. Entonces, Nicolás le enseña esta carta.

Explicar este truco.

(Nach Nicolas CHUQUET 1445 – 1500)

Aufgabe 2 5 Punkte

Ganz quadratisch

„Dieses Quadrat hier hat eine Seitenlänge von 6 cm“, sagt Pierre zu seiner Tochter Nathalie. „Zerlege es in neun Quadrate, und zwar so, dass die Maßzahl jeder Seitenlänge in Zentimeter wieder ganzzahlig ist.“

Nathalie findet recht schnell eine Lösung und überlegt, ob das Problem noch weitere Lösungen besitzt.

Dabei gilt: Zwei Lösungen sind nur dann verschieden, wenn man beim Zerschneiden des ursprünglichen Quadrats unterschiedliche Ergebnisse erhält.

Gib alle möglichen Lösungen an.



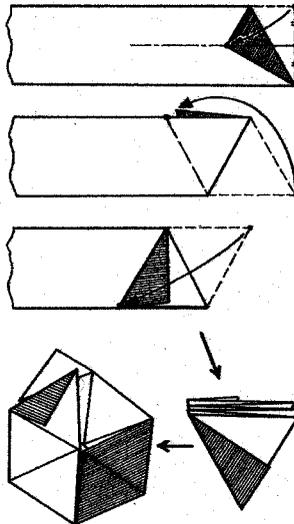
Aufgabe 3 7 Punkte

Hexagami

In einem Origami-Buch findet sich nebenstehende Anleitung zum Falten eines regelmäßigen Sechsecks. Man verwendet dazu einen rechteckigen Papierstreifen dessen Seiten 3,6 cm und $12\sqrt{3}$ cm lang sind. Vorder- und Rückseite des Streifens sind verschiedenfarbig.

Stelle das beschriebene Sechseck her und klebe es auf das Lösungsblatt.

Berechne seinen Flächeninhalt.



Aufgabe 6 5 Punkte

Spaziergang nach Syrakus

John, Student an der Universität von Syracuse (USA), beschäftigt sich mit Folgen aus ganzen Zahlen.

Er beginnt mit einer Startzahl und berechnet die nächste Zahl nach folgender Regel:

- ist die Zahl gerade, so ist der Nachfolger halb so groß.
- ist die Zahl ungerade, so multipliziert man sie mit 3 und addiert 1.

Auf das Ergebnis wendet er die Regel erneut an, erhält die nächste Zahl der Folge und so fort.

Bei der ersten Folge beginnt John mit der Startzahl 1. Dann untersucht er die Folgen mit den Startzahlen 2, 3 und so weiter, bis zur Startzahl 25.

Dabei stellt er fest, dass alle 25 Folgen eine bemerkenswerte Eigenschaft besitzen.

Mache mit möglichst wenig Rechenaufwand die gleichen Untersuchungen wie John und gib die gemeinsame Eigenschaft an.

(Bis heute ist nicht bewiesen, ob diese Eigenschaft für alle Folgen gilt, welche nach obiger Vorschrift berechnet werden.)

Aufgabe 4 5 Punkte

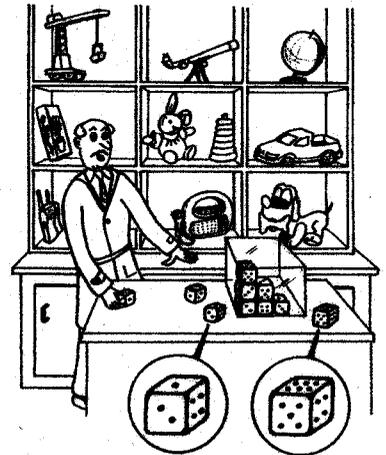
Volle Punktzahl

Die Würfel, welche Monsieur Victor in seinem Spielzeugladen verkauft, bewahrt er in einer durchsichtigen, quaderförmigen Schachtel auf.

In die Schachtel passen genau 60 Würfel, fünf in der Länge, vier in der Breite und drei in der Höhe.

Er sortiert die Würfel so ein, dass die Gesamtsumme aller Augenzahlen, welche durch die sechs Quaderflächen nach außen zeigen, maximal ist.

Bestimme den Wert dieser Summe. Begründe.



Aufgabe 5 7 Punkte

Formvollendet

Marie-Odile und Julie wollen den Rest eines Kuchens gerecht unter sich teilen.

Das Reststück ist ein Trapez mit zwei rechten Innenwinkeln.

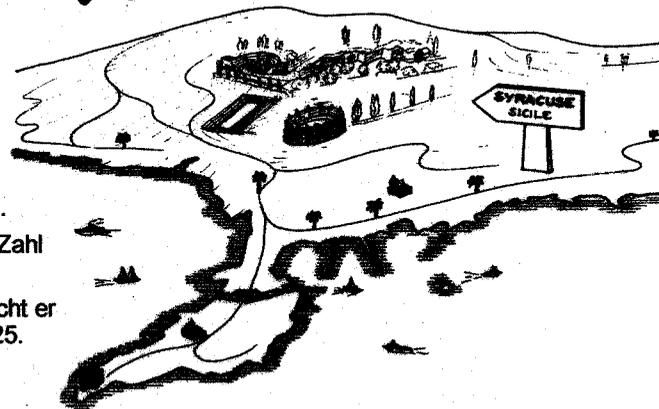
Die Grundseiten sind 1 dm und 3 dm lang, die Höhe beträgt 4 dm.

Julie besteht darauf, dass beide Teilstücke sowohl in der Form als auch im Flächeninhalt übereinstimmen.

Marie-Odile löst das Problem mit einem einzigen geradlinigen Schnitt.

Zeichne die Kuchenfläche im Maßstab 1:5 und markiere die Schnittlinie.

Zeige, dass die beiden Kuchenstücke in Form und Flächeninhalt übereinstimmen.

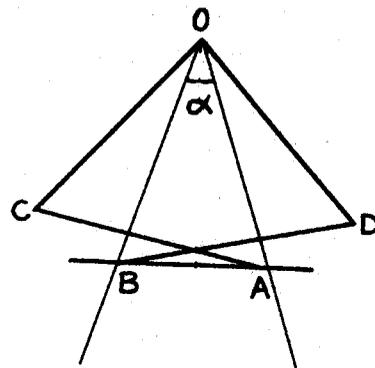


Aufgabe 10
10 Punkte

Winkelzüge



Erich hat ein Verfahren, um bei einem Winkel kleiner als 60° einen Zahnstocher in die Position der Winkelhalbierenden zu legen. Dazu verwendet er insgesamt 5 Zahnstocher gleicher Länge. Bei einem gegebenen Winkel legt er zunächst 3 Zahnstocher in eine geeignete Lage, dann legt er zwei von ihnen um und kommt anschließend mit den restlichen zur abgebildeten Figur. Nun kann er einen der Zahnstocher in die gesuchte Position legen.



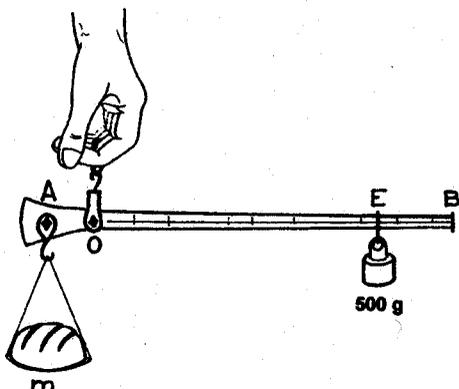
Bei einem Winkel zwischen 60° und 120° kommt er sogar mit vier Zahnstochern aus.

Beschreibe in jedem der beiden Fälle das Verfahren und illustriere es durch geeignete Zeichnungen. Die Dicke der Zahnstocher kann vernachlässigt werden.

Aufgabe 11
5 Punkte

Im Gleichgewicht

Eine römische Waage besitzt einen Waagbalken mit einer Skala, auf welchem ein Massenstück von 500g zwischen O und B bewegt werden kann.

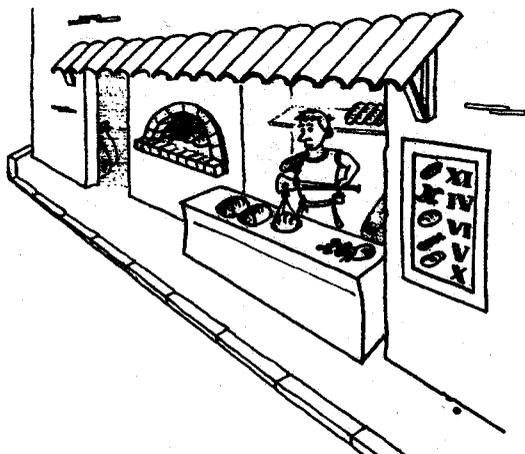


Um einen Körper der Masse m zu wiegen, befestigt man ihn im Punkt A und positioniert das bewegliche Massenstück so, dass die in O aufgehängte Waage im Gleichgewicht ist (Position E).

In diesem Fall gilt $\overline{OA} \cdot m = \overline{OE} \cdot 500\text{g}$

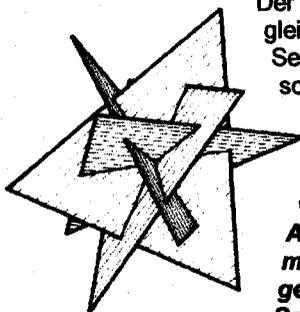
Sei $\overline{AB} = 24\text{cm}$. Die Waage ist bei einem Körper der Masse 2kg im Gleichgewicht, wenn $\overline{AE} = 20\text{cm}$ beträgt.

Berechne die Position von O auf der Strecke AB und bestimme auf ihr eine Skala mit 250g-Schritten.



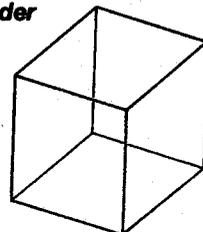
Aufgabe 12
7 Punkte

Zwölfspitz



Der abgebildete Zwölfspitz besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken mit gleicher Seitenlänge, die sich paarweise schneiden. Er ergibt sich, wenn man jeweils drei geeignete Kantenmitten eines Würfels miteinander verbindet.

Zeichne in einem Schrägbild, welches dem der Abbildung ähnelt, mit durchgezogenen Linien die Seiten der vier



Dreiecke ein, von denen der Zwölfspitz gebildet wird.

Zeichne jedes Dreieck in einer anderen Farbe.

Aufgabe 13
10 Punkte

Gebietsansprüche

Emir Abel besitzt ein quadratisches Ölfeld. „Ich habe beschlossen, euch einen Teil davon zu überlassen“, sagt er zu seinen drei Söhnen. „Stellt euch auf den Grenzlinsen des Feldes auf. Das Dreieck, das durch eure Position gebildet wird, soll euch gehören.“

Wie müssen sie sich aufstellen, um ein möglichst großes Flächenstück zu erhalten?

Beweise deine Antwort.

