Mathematik ohne Grenzen Februar 2006 Lösungshinweise

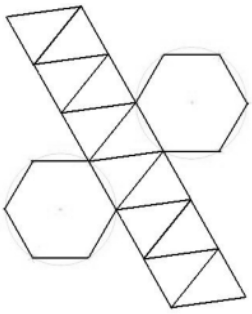
Aufgabe 1 : Cheerleaders

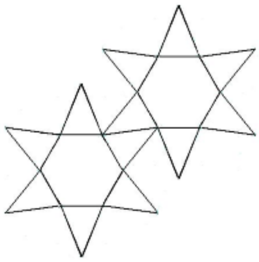
Setzt man das Bild neu zusammen, so sind es nur noch 12 Mädchen, während man auf dem ursprünglichen Bild 13 Mädchen erkennen konnte. Betrachte man das Ausgangsbild jedoch genauer, so stellt man fest, dass im Gegensatz zum zweiten Bild, bei jeder Figur etwas fehlt. Bei der ersten Figur fehlen die Knie, bei der zweiten die Schultern und so fort. Bei jeder Figur fehlt ein Dreizehntel.

Durch die neue Anordnung entstehen aus 13 verkürzten Figuren 12 vollständige Figuren ($13 \cdot \frac{12}{13} = 12$).

Aufgabe 2: Antiprisma

zwei mögliche Netze :





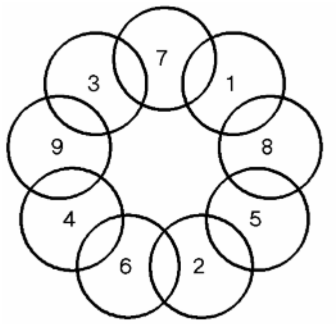
Aufgabe 3: Heute im Angebot

Bezeichnet man die Anzahl der Tiere mit x, so gilt
$(x-42) + (x-32) + (x-47) + (x-44) = x$
Daraus folgt $x = 55$.

Anzahl der Meerschweinchen: 55–42 = 13.
Analog erhält man die Anzahl der anderen Tiere:
23 Fische, 8 Katzen und 11 Hunde.

Angebot am nächsten Morgen :
33 sind keine Meerschweinchen, 28 keine Fische, 40 sind keine Katzen und 34 keine Hunde.

Aufgabe 4: Rücksicht



Aufgabe 5: Unnatürliche Mitte:

Die Menge der Gitterpunkte lässt sich nach der Parität ihrer Koorinaten in vier Klassen einteilen : (gerade/gerade), (ungerade/ungerade) (ungerade/gerade) und (gerade/ungerade).

Bei zwei Punkte derselben Klasse ist die Summe beider Koordinaten gerade und der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke ist ein Gitterpunkt.

Da bei mehr als vier Punkten mindestens zwei in derselben Klasse liegen, kann Claudio **maximal vier Punkte** markieren, ohne die Regel zu verletzen.

Aufgabe 6 : Der Preis der Preise:

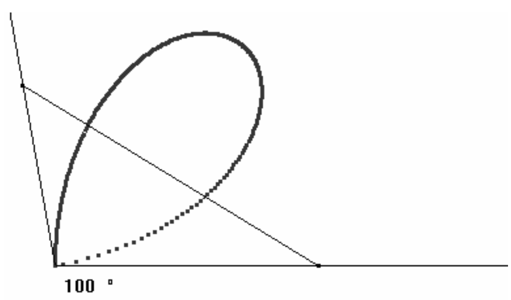
Für die Anzahlen P, T, M der Pokale, der T-Shirts und der Packungen von 5 Medaillen erhält man das folgende

Gleichungssystem: $\begin{cases} 23P + 7T + 4M = 150 \\ P + T + 5M = 50 \end{cases}$

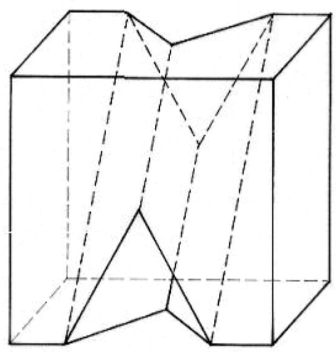
Da nur natürliche Zahlentripel als Lösung erlaubt sind, erhält man (P/T/M)=(3/7/8) als einzige Lösung.

Michele kann also 3 Pokale, 7 T-Shirts und 40 Medaillen kaufen.

Aufgabe 7 : Krokodilstränen



Aufgabe 8 : Piercing



Aufgabe 9: Versenkt

Seien a und b die Länge und die Breite der Grundfläche des Aquariums.

Taucht man den kleinen Würfel ein, so erhält man für das Wasservolumen $V = (ab - 100) \cdot 10\,cm^3$.

Beim großen Würfel ergibt sich $V = (ab - 200) \cdot 20\,cm^3$

Da sich das Wasservolumen nicht ändert, kann man gleichsetzen und erhält **ab = 700 cm²**.
Das Wasservolumen beträgt also **6000 cm^3**.

700 kann man auf 9 verschiedene Weisen als Produkt von zwei natürlichen Zahlen schreiben, aber a und b müssen jeweils größer als 20 sein, damit der große Würfel in das Aquarium passt.

So erhält man **a = 28 cm und b = 25 cm**.
(a = 35 und b = 20 ist zwar als Grenzfall möglich, aber nicht praktikabel.)

Aufgabe 10: Rittlings

Man erhält ein Oktaeder der Kantenlänge 5cm. Es besteht aus zwei quadratischen Pyramiden, die jeweils eine Kantenlänge von 5 cm und eine Höhe von $2{,}5\sqrt{2}$ cm haben.

Daher ergibt sich für das Volumen: $V = 2 \cdot \frac{25 \times 2{,}5\sqrt{2}}{3}\,cm^3 = \frac{125 \cdot \sqrt{2}}{3}\,cm^3$.

Das Volumen beträgt rund 59 cm^3

Klasse 11 :

Aufgabe 11: Sag' mir den Code

Die gesuchte Zahl ist **2^{30} = 1 073 741 824**, denn es gilt $2^{30} = (2^{15})^2 = (2^{10})^3 = (2^6)^5$
Der Nachweis der Eindeutigkeit ist nicht verlangt.

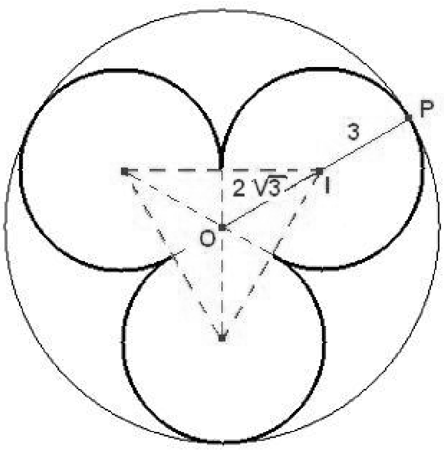
Aufgabe 12: Mathe-Express

Der Zug legt in 2 Sekunden 60 m und in 72 Sekunden 2160 m zurück.
Nimmt man Zoé als Bezugspunkt, dann hat der Kirchturm diese Distanz zurückgelegt.

Für den Abstand d zwischen Zoé und dem Kirchturm gilt: $\frac{d}{1m} = \frac{2160\,m}{1{,}2\,m} \Rightarrow d = 1800\,m.$

Der Kirchturm ist also rund 1800 m von der Bahnlinie entfernt.

Aufgabe 13: Aus Budapest



Die Mittelpunkte der 3 kleinen Kreise mit dem Radius r bilden ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge $a = 2r$.
Der Mittelpunkt O des großen Kreises ist sowohl Schwerpunkt als auch Höhenschnittpunkt in diesem Dreieck.
Die Höhe des gleichseitigen Dreiecks ist

$h = \frac{1}{2} a \cdot \sqrt{3} = r \cdot \sqrt{3}$.

Für den Radius OP des großen Kreises gilt

$\overline{OP} = \frac{2}{3} h + r = \frac{2}{3} r\sqrt{3} + r.$

$r = 3\,cm \Rightarrow \overline{OP} = \frac{2}{3} \cdot 3\,cm\,\sqrt{3} + 3\,cm = (2 \cdot \sqrt{3} + 3)\,cm.$

Der Radius des großen Kreises beträgt rund 6,5 cm.