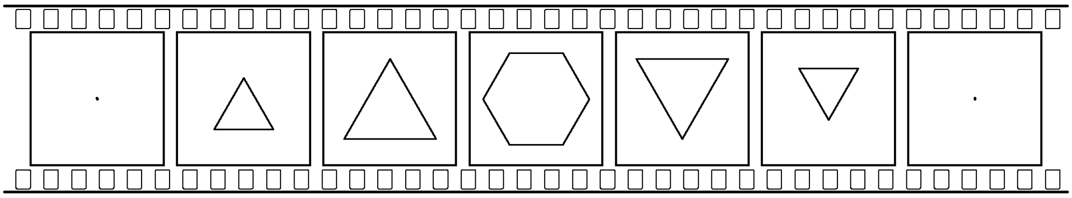
Mathematik ohne Grenzen Lösungshinweise 26.2.2008

Aufgabe 1: *Nichts wie weg!*

Sophie und Antoine (Tony) benötigen 20 bzw. 10 Minuten für die Überquerung. Darum müssen sie zusammen bleiben. Es muss aber auch dafür gesorgt werden, dass die Laterne möglichst schnell zurückkommt.
Juliette und Romain (Rob) überqueren als erste in 2 Minuten. Juliette bringt die Laterne in einer Minute zurück. Danach überqueren Sophie und Antoine den Abgrund in 20 Minuten, worauf Romain die Laterne innerhalb von zwei Minuten zurückbringt und schließlich in weiteren zwei Minuten den Abgrund zusammen mit Juliette zum letzten Mal überquert. Insgesamt benötigen sie 27 Minuten.
(*Juliette und Romain können die Rollen tauschen, ohne dass sich das Ergebnis ändert.)

Aufgabe 2: *Flächenland*



Zusatzinformation: Die Seiten des kleinen Dreiecks sind so lang wie die Seiten des Sechsecks und halb so lang wie die Seiten des großen Dreiecks.

Aufgabe 3: *Reflexionsreflex*

Auf der Abbildung des Aufgabenblatts zeigt die Uhr 12:00 an.
Roselyne hat demnach um 11:51 auf die Uhr geschaut.
Darunter stehen die beiden anderen Lösungen.

Aufgabe 4 : *Nur Treffer!*

Die Summe der Punkte ist 243. Damit hat jeder Schütze hat 81 Punkte erreicht.
Die einzig mögliche Verteilung ist 25 + 25 + 25 + 3 + 3 = 81 für den einen und 50 + 15 + 9 + 6 + 1 = 81 für die beiden anderen Schützen.

Aufgabe 5: *Kopfgeburten*

Der Ritter kann den abgebildeten Drachen zum Beispiel so besiegen, wie es in der Tabelle angegeben ist. Sobald er den letzten Kopf abschlägt, stirbt der Drache.

Ohren	1	2	1	2	1	0	1
Schnäbel	2	1	2	1	0	1	0
Schnauzen	4	3	2	1	2	1	0

Es gibt drei Arten siebenköpfiger Drachen die unbesiegbar sind: (1,1,5), (1,3,3) und natürlich (0,0,7). Die Zuordnung zu den Kopftypen spielt dabei keine Rolle.

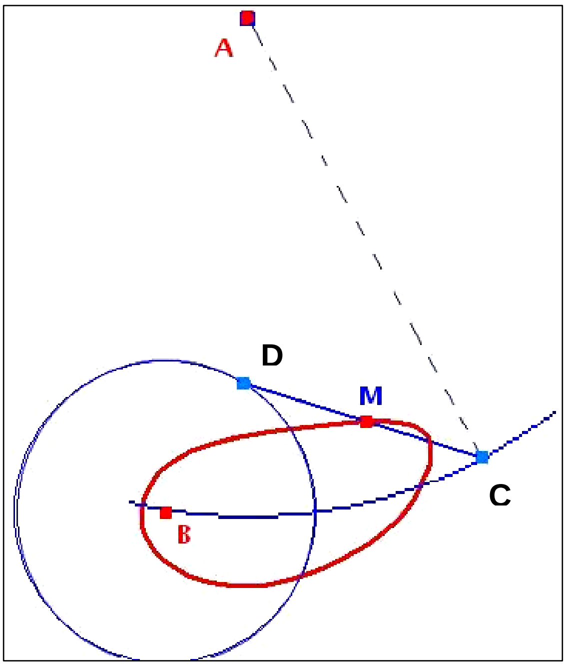
Aufgabe 6: *Abstimmung*

Hier sind zwei mögliche Lösungen:

a) Hätte Julian die Durchschnittsnote übernommen, so hätte sich diese nicht geändert. Durch den zusätzlichen Punkt steigt der Durchschnitt um 0,02 , das ist 1/50 Punkt. Sein zusätzlicher Punkt verteilt sich also auf 50 Stimmabgaben. Ohne seine eigene Stimme sind es 49.

b) Sei M der Mittelwert vor Julians Stimmabgabe und n die Anzahl der vorausgegangenen Stimmabgaben.
Dann gilt: $\dfrac{nM + (M+1)}{n+1} = M + 0{,}02$
Man erhält $n = 49$.
Die Lösung ist unabhängig von M.

Aufgabe 7: *Kurventraining*



Aufgabe 8: *Mehret euch!*

Die Tabelle zeigt, um welchen Faktor die Population jeweils zugenommen hat:

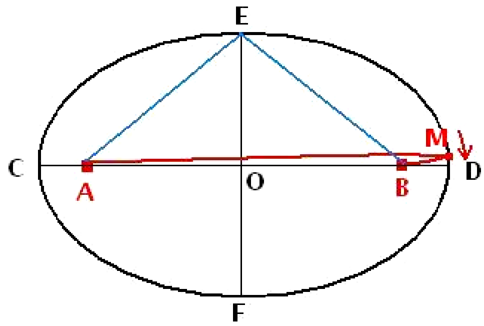
Stunden	6	10	12	24	30
A	8	32	64	4096	32768
B	9		81	6561	59049
C		25			15625

Nach 25 Stunden ist C = 3125. Mit den Tabellenwerten für 24 Stunden lässt sich die Reihenfolge bereits angeben. Nach 30 Stunden (kgV von 2, 3 und 5) lassen sich die Populationen zum gleichen Zeitpunkt vergleichen. Es ist $\boxed{C < A < B}$.

Alternativ kann man auch die Wachstumsfaktoren für die stündliche Zunahme angeben:
Man erhält für A, B und C $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$ und $\sqrt[5]{5}$.
Dies entspricht einer stündlichen Zunahme von rund 41,4%, 44,2% und 38%.

Aufgabe 9: *Mit der Schnur*

Seien A et B die Pflöcke, CD und EF die Achsen der Ellipse, O ihr Mittelpunkt, l die Länge der Schnur und M der bewegliche Punkt.

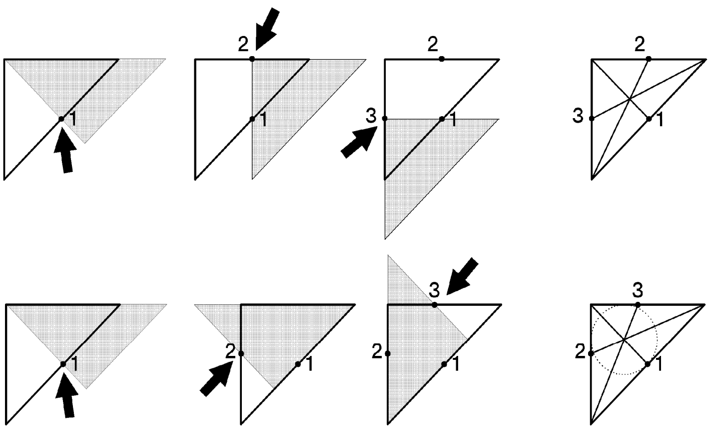


Befindet sich M in C oder in D, so gilt:
$l = \overline{AB} + 2\overline{AC} = \overline{AB} + 2\overline{BD} \Rightarrow \overline{AC} = \overline{BD}$ und damit
$l = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BD} = \overline{CD} = 15\,m$.

Befindet sich M in E, so gilt $\overline{AE} = \frac{1}{2} l = 7{,}5m$.

Mit $\overline{OE} = 4{,}5\,m$ ergibt ich nach Pythagoras $\overline{AO} = \overline{OB} = 6m$ und damit $\overline{AB} = 12\,m$.

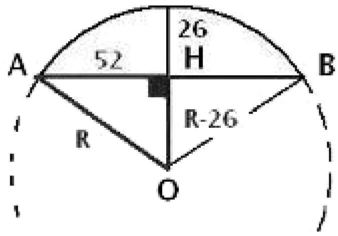
Aufgabe 10: *Simon ist spitze!*



Schwerpunkt (1. Reihe):
Das Dreieck ist gleichschenklig. Die Halbierende des Rechten Winkels legt den Mittelpunkt der Hypotenuse fest (1). Die Orthogonale zu einer Kathete durch (1) ist Mittelparallele im Dreieck und bestimmt daher den Mittelpunkt der anderen Kathete (2) und (3).

Inkreismittelpunkt (2. Reihe):
Die Winkelhalbierende ist Symmetrieachse des betreffenden Winkels. Da im zweiten und dritten Bild das Ausgangsdreieck und das getönte Dreieck zueinander symmetrisch liegen, liegen die Punkte (2) und (3) auf der Symmetrieachse und damit auf der Winkelhalbierenden.

Die beschriebenen Konstruktionen stellen nicht die einzige Lösungsmöglichkeit dar.



<u>Aufgabe 11: *Scheibenkleister*</u>

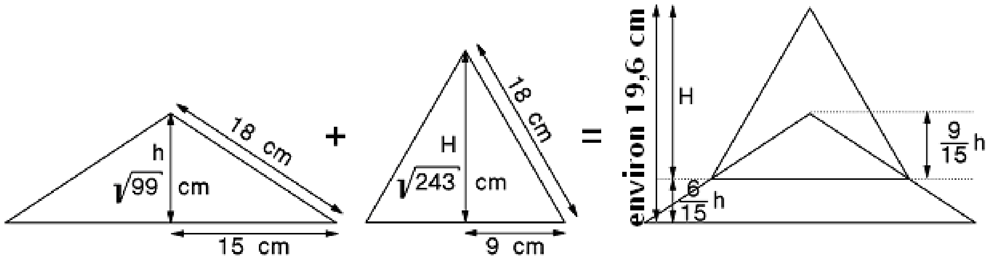
Nach Pythagoras gilt: $R^2 = (R - 26)^2 + 52^2$

Als Lösung erhält man $\boxed{R = 65 \text{ cm}}$.

<u>Aufgabe 12: *Alte und Junge*</u>

Sei x die Anzahl der jungen Einwohner. Dann gilt $0{,}9\cdot(5000-x) + 0{,}2x = 0{,}34\cdot 5000$.
Man erhält x = 4000.

<u>Aufgabe 13: *Magischer Harry*</u>



Sei s die Mantellinie, α der Mittelpunktswinkel des Kegelmantels und r der Radius der Kegelgrundfläche. Dann gilt $2\pi \cdot s \cdot \frac{\alpha}{360} = 2\pi \cdot r$ und damit $r = s \cdot \frac{\alpha}{360}$.

Für beide Kegel ist $s = 18\,cm$. Für den ersten Kegel ist $\alpha = 300°$ und damit r = 15 cm.
Mit $\alpha = 180°$ erhält man $r = 9\,cm$ für den zweiten Kegel.

Die Höhen h und H der beiden Kegel ergeben sich mit dem Satz des Pythagoras.

Man erhält $h = \sqrt{99}\,cm$ und $H = \sqrt{243}\ cm$.

Sei x der Teil von h, welcher im Inneren des oberen Kegels liegt.
Nach dem zweiten Strahlensatz gilt $\frac{x}{9} = \frac{h}{15}$ und damit $x = \frac{9}{15}h$.

Für die Gesamthöhe des Hutes ergibt sich also $\frac{6}{15}h + H \approx 19{,}6\ cm$.