Mathematik ohne Grenzen 10.02.09 Lösungsvorschläge

<u>Aufgabe 1: *Gute Vorsätze, 7 Punkte*</u>

Bei n Ferientagen hat das Buch $30n$ Seiten. Das halbe Buch besitzt $15n$ Seiten. Wenn er also bis zur Hälfte des Buches 15 Seiten pro Tag liest, benötigt er dafür n Tage und die Ferien sind um.

Bemerkung : Würde er in der ersten Hälfte der Ferien 15 Seiten pro Tag lesen, könnte er seinen Rückstand mit 45 Seiten pro Tag ausgleichen.(Diese Bemerkung wird in der Bearbeitung der Aufgabe nicht erwartet.)

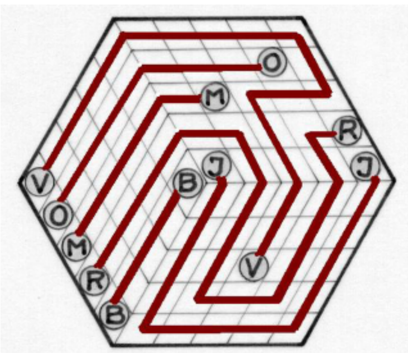
<u>Aufgabe 3: *Gut platziert, 7 Punkte*</u>

2	7	1	3	13
3	8	7	9	27
1	9	3	8	21
6	24	11	20	

2	7	1	3	13
3	9	7	8	27
1	8	3	9	21
6	24	11	20	

Der Summenwert 6 der ersten Spalte legt die Werte 1, 2 und 3 in dieser Spalte fest.
Der Summenwert 27 der zweiten Zeile kann nur mit 3 in der ersten Spalte sowie 7, 8 und 9 erreicht werden.
Durch den Summenwert 24 der zweiten Spalte sind die Zahlen 7, 8 und 9 festgelegt, wobei wegen der Zeilensumme die 7 in der ersten Zeile stehen muss.
Aus den Positionen von 8 und 9 in der zweiten Spalte ergeben sich zwangsläufig die übrigen Werte.

<u>Aufgabe 4: *Kreuzungsfrei, 5 Punkte*</u>



<u>Aufgabe 6: *Schon 20Jahre, 5 Punkte*</u>

Von 1989 erreicht man 2009 in 5 Schritten.
Beispiel (verwendete Ziffern fett):
1989 ; **10**89 ; **11**89 ; **21**89 ; 2**109** ; 2009

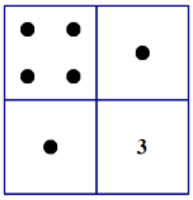
<u>Aufgabe 2: *Große Sprünge, 5 Punkte*</u>

(7+7)×7×7+7+7 = 700

Der Gestiefelte Kater kommt von Straßburg nach Kazan mit zwei Schritten, gefolgt von zwei Superschritten und zwei abschließenden Einzelschritten.

Der Nachweis, dass dies die optimale Lösung ist, wird nicht verlangt ($700 = 2\times7^3 + 2\times7$).

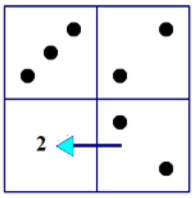
<u>Aufgabe 5: *Würfelgeheimnis, 7 Punkte*</u>



Die Rückansicht ist festgelegt, bis auf die Orientierung der 3. Je nach Orientierung der 3 ergeben sich zwei Fälle.

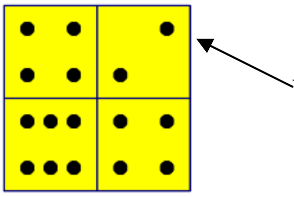
<u>Fall 1:</u>

Ansicht der linken Seitenfläche:



Hat dieses Feld den Wert 2, so hat das linke Nachbarfeld auch den Wert 2.

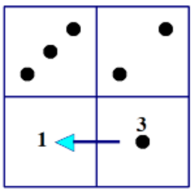
Daraus ergibt sich folgende Ansicht der Unterseite:



Würfel vorne rechts

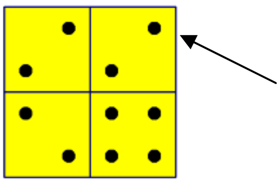
<u>Fall 2:</u>

Ansicht der linken Seitenfläche:



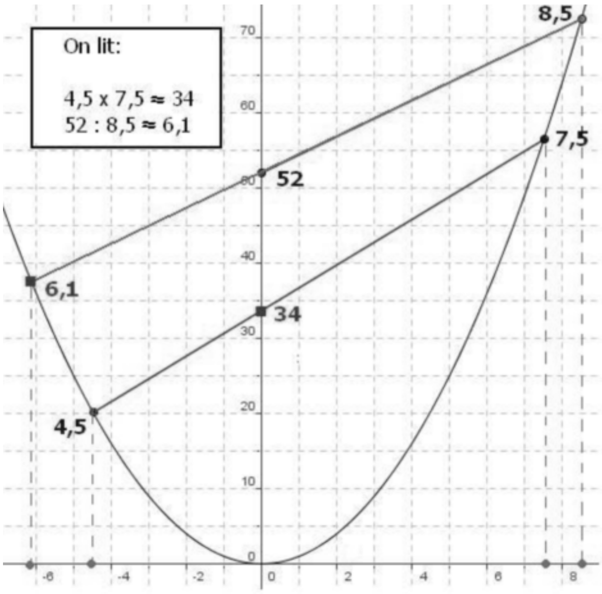
Hat dieses Feld den Wert 3, so hat das linke Nachbarfeld den Wert 1

Daraus ergibt sich folgende Ansicht der Unterseite:



Würfel vorne rechts

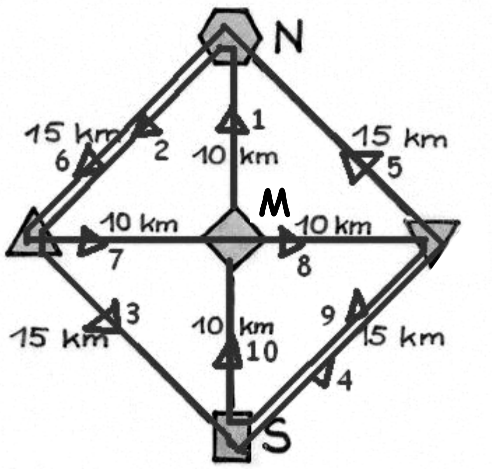
Aufgabe 7: *Parabelmultiplikation, 7 Punkte*



Möglicher Nachweis der verwendeten Eigenschaft (nicht verlangt): Sei y=mx+c die Gleichung einer Geraden, welche die Parabel schneidet. Für die Lösungen x_1 und x_2 der Gleichnug $x^2-mx-c = 0$ gilt dann $x_1x_2 = -c$ und damit $|x_1x_2| = c$.

Aufgabe 8: *Kurz, kürzer, … , 5 Punkte*

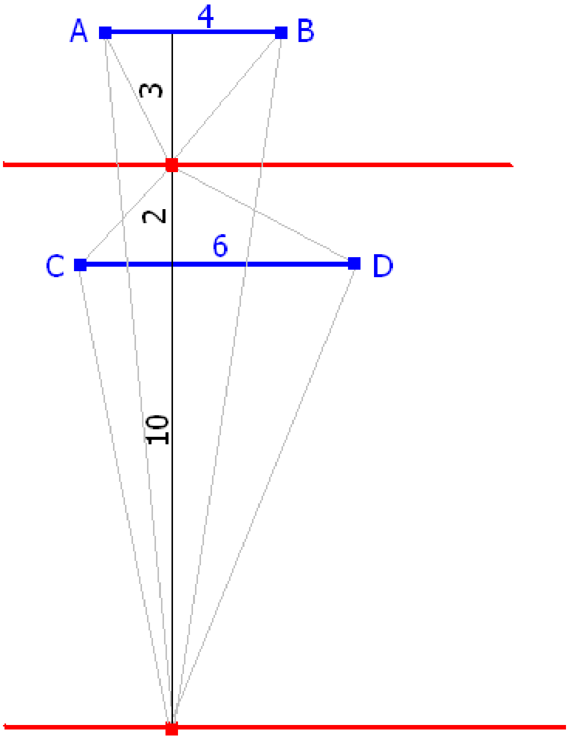
Hier ist eine mögliche Lösung:



Die kürzeste Route ist 130 km lang.

(Da die äußeren Orte Durchgangsorte sind muss die Anzahl der dort endenden Streckenabschnitte gerade sein. Die Strecke wird bei der gegebenen Anordnung am kürzesten, wenn möglichst wenige Teilstrecken verdoppelt werden, so wie dies in der Abbildung der Fall ist. Die Begründung ist nicht verlangt.)

Aufgabe 9: *Flächengleich, 7 Punkte*



Die Menge der Punkte M umfasst zwei zu AB und CD parallele Geraden.
Sei h die Höhe des Dreiecks CMD. Dann gilt für die Flächeninhalte der beiden Dreiecke 6h/2 = 4(5-h)/2 und damit **h = 2**, oder es gilt 6h/2 = 4(5+h)/2 und damit **h = 10**.

Aufgabe 10: *Cut and paste, 10 Punkte*

Mit *n* Streifen der Länge *x* sind die Seitenlängen des Blattes *n* und *x*. Klebt man die Streifen zu einem Band aneinander, so erhält man *n -1* Überlappungen der Länge 1 cm.
Für die Gesamtlänge des Bandes gilt also $nx – (n-1) = 400$ und damit $n·(x - 1) = 399$.

Da n und x ganzzahlig sind, ergeben sich für die Zerlegung von 399 in zwei Faktoren die in der Tabelle dargestellten Möglichkeiten

n	*x - 1*	*x*
1	399	400
3	133	134
7	57	58
19	**21**	**22**
21	**19**	**20**
57	7	8
133	3	4
399	1	2

Weil das Blatt kleiner als das Format A4 sein soll, bleiben zwei Abmessungen übrig:

$\boxed{n = 19 , x = 22}$ oder $\boxed{n = 21 , x = 20}$

Stufe 10 und 11

Aufgabe 11: *Hochgeklappt, 5 Punkte*

Der Lotfußpunkt F ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC.

Begründung (nicht verlangt):
Beim Hochklappen der Seitenflächen des Tetraeders werden die Eckpunkte des Dreiecks ABC um die jeweilige Mittelparallele gedreht. Die Rotationsebene, in der sich ein Eckpunkt dabei bewegt, ist orthogonal zur jeweiligen Mittelparallelen und damit auch zur entsprechenden Dreiecksseite.
Das Lot durch die Pyramidenspitze S ist die Schnittgerade der drei Rotationsebenen. Der Lotfußpunkt ist der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC.

Aufgabe 12: *Hell und dunkel, 7 Punkte*

Summe der Flächeninhalte der dunklen Quadrate: $AJ^2 + BK^2 + CL^2$.
Die Darstellung der Quadrate nach Pythagoras ergibt
$(MA^2 - MJ^2) + (MB^2 - MK^2) + (MC^2 - ML^2) = \boldsymbol{MA^2+MB^2+MC^2 - (MJ^2+MK^2+ML^2)}$
Für die Inhaltssumme der hellen Quadrate erhält man
$AL^2+CK^2+BJ^2 = (MA^2-ML^2)+(MC^2-MK^2)+(MB^2-MJ^2) = \boldsymbol{MA^2+MB^2+MC^2 - (MJ^2+MK^2+ML^2)}$
Die beiden Summen sind gleich.

Aufgabe 13: *Loch im Quadrat, 10 Punkte*

Der Flächeninhalt des Ausgangsquadrats beträgt 64 cm². Jedes Teilstück, und damit auch das leere Quadrat hat den Flächeninhalt 16 cm². Die Seitenlänge des leeren Quadrats ist also 4 cm.

Daraus folgt $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=4 \end{cases}$

Man erhält $x = 6$ und $y = 2$.