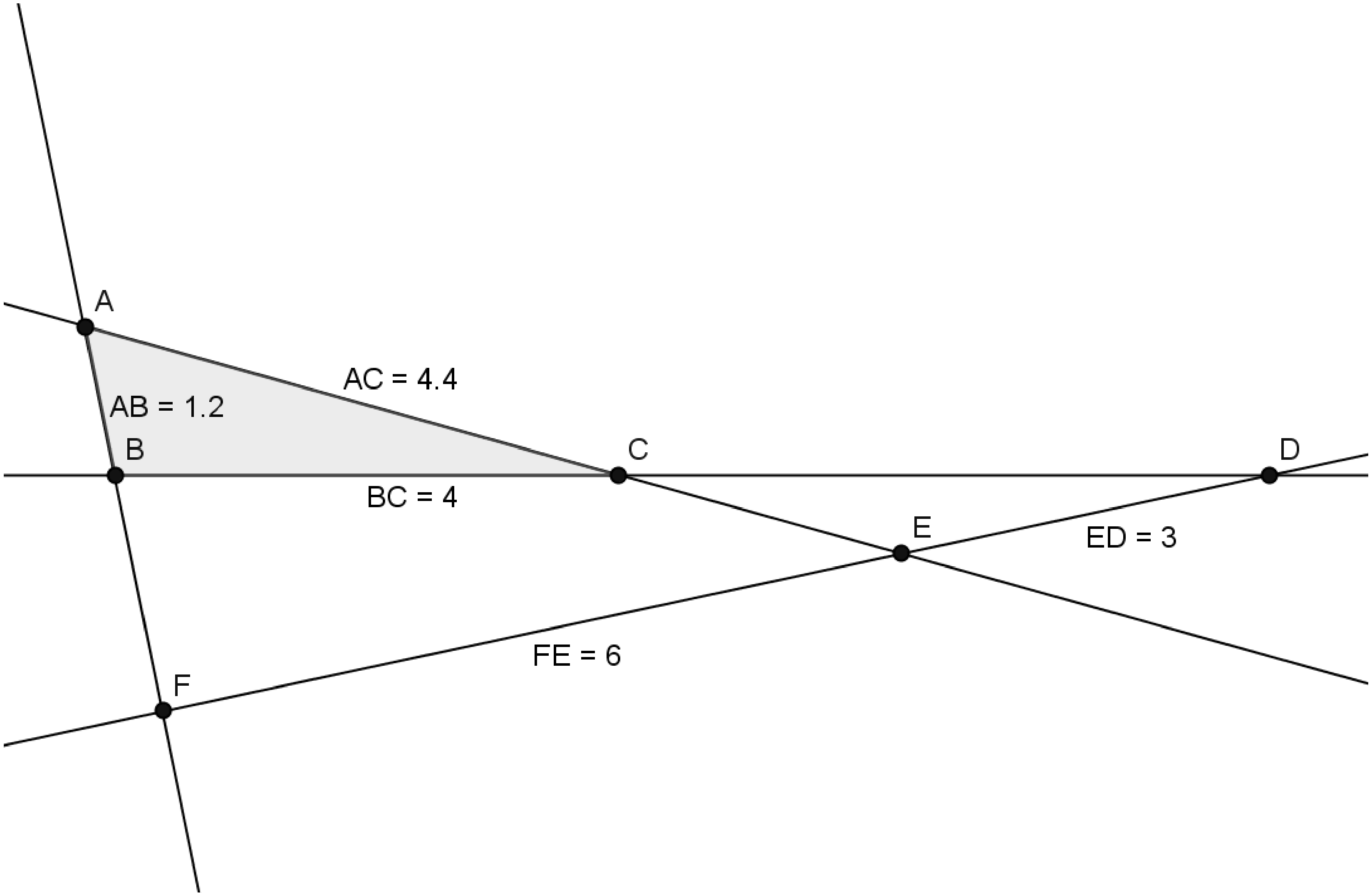


Zu Aufgabe 5

**Aufgabe 11 – Mal so, mal so (5 Punkte)**

Sei a die Anzahl der Sitzplätze in jeder Reihe und b die Anzahl der Reihen in der ursprünglichen Anordnung. Dann ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{cases} ab = (a+4)(b-1) \\ ab = (a-11)(b+4) \end{cases} \text{ und umgeformt } \begin{cases} -a+4b = 4 \\ 4a-11b = 44 \end{cases}.$$

Als Lösung erhält man $a = 44$ und $b = 12$.

**Es gibt 528 Sitzplätze**.

| B \ A | 2 | 4 | 10 |
|---|---|---|---|
| 3 | B | A | A |
| 5 | B | B | A |
| 8 | B | B | A |

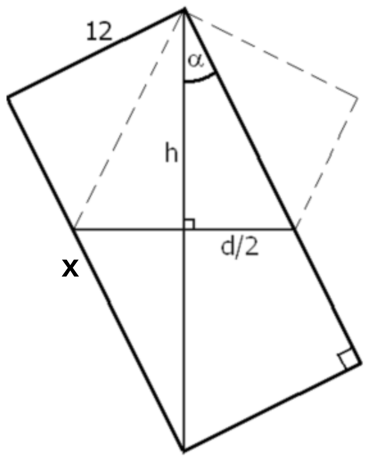
**Aufgabe 12 – Wer gewinnt? (7 Punkte)**

Stellt man die möglichen Ausgänge in einer Tabelle dar, so erkennt man dass die Gewinnwahrscheinlichkeit von Anton 4/9 und die von Barbara 5/9 beträgt.

Unter der Bedingung, dass die Augenzahlen von Christines Würfel ganzzahlig sind, gibt es nur zwei Möglichkeiten:
Würfel 1 mit 1, 6 und 9 oder Würfel 2 mit 1, 7 und 9
Mit beiden Würfeln gewinnt Christine gegen Anton mit der Wahrscheinlichkeit p = 4/9 und gegen Barbara mit p= 5/9.

Lässt man alle reellen Zahlentripel (x,y,z) als Beschriftung zu, so muss eine der folgenden Bedingungen erfüllt sein: ($x < 2$ und $5 < y < 8$ und $8 < z < 10$) oder ($3 < x < y < 4$ und $8 < z < 10$) oder ($x < 2$ und $8 < y < z < 10$).

**Aufgabe 13 – Denk' ich an China … (10 Punkte)**

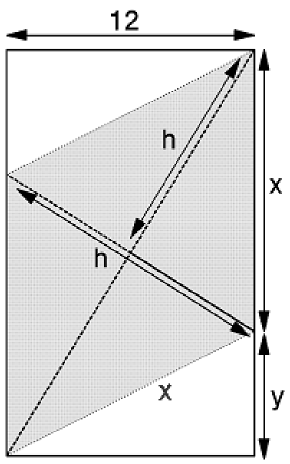



Lauralie hat ihr Blatt so gefaltet, dass zwei gegenüberliegende Ecken aufeinander liegen.

Faltet man das Blatt auseinander, so erkennt man den in der Abbildung dargestellten Zusammenhang:

$$h = d \Leftrightarrow \tan\alpha = \frac{1}{2} = \frac{12}{x} \Leftrightarrow x = 24$$

Die Länge des Streifens beträgt 24 cm.




**Hier ein weiterer Lösungsvorschlag:**

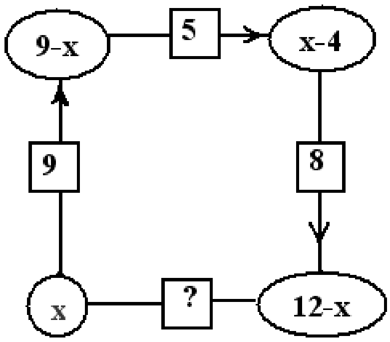
Für den Flächeninhalt der grauen Raute gilt $A = h^2 = 12x$.

Nach Pythagoras ist $h^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 = x^2$, also $12x + \frac{12x}{4} = x^2$.

Man erhält $x = 15$. Aus $y = x^2 - 12$ folgt $y = 9$ und damit $x + y = 24$.

## Aufgabe 6 – Farbige Zahlen (5 Punkte)

Die Zahlen 1 und 2 sind rot. 2+1 = 3, also ist 3 blau. 2+1 < 4, also ist 4 rot.
Wie man leicht nachprüft, sind 5,6 und 7 blau.
4+2+1 < 8, also ist 8 rot. Die bisher gefundenen Zahlen sind Zweierpotenzen mit denen man alle Zahlen kleiner als 16 in der verlangten Weise als Summe schreiben kann. 16 ist wieder rot. Die Überlegung macht deutlich, dass alle Potenzen von 2 rot und alle anderen Zahlen blau sind.
**Die roten Zahlen kleiner als 50 sind: 1; 2; 4; 8; 16 und 32.**

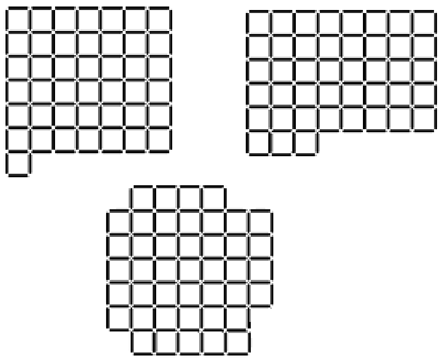



## Aufgabe 7 – Nicht die 13 (7 Punkte)

Bezeichnet man die Zahl im Kreis links unten mit x, so ergeben sich in Pfeilrichtung Terme für die Zahlen in den anderen Kreisen. Daraus ergibt sich, dass an Stelle der Zahl 13 nur die Zahl 12 eingesetzt werden kann. Da nur natürliche Zahlen zugelassen sind, kann x alle Werte von 4 bis 9 annehmen. Es gibt also 6 mögliche Lösungen für die Zahlen in den Kreisen.

## Aufgabe 8 – Streichholzquadate (5 Punkte)

Intuitiv findet man, dass kompakten Anordnungen, welche der Form eines Quadrats möglichst nahe kommen, die Anzahl der Einheitsquadrate optimieren. Es lässt sich zeigen, dass man 100 Streichhölzer zu maximal 43 Einheitsquadraten anordnen kann. *Der schwierige Beweis wird hier nicht verlangt.*
Nebenstehend drei mögliche Lösungen.



## Aufgabe 9 – Schwarzarbeit (7 Punkte)

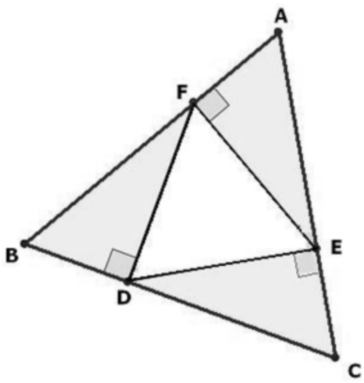
Im schlimmsten Fall muss Geoffrey **27 Gegenstände** nehmen. 26 reichen nicht aus: er könnte 20 Socken und 6 linke Handschuhe haben. Mit 27 Gegenständen hat er mindestens 7 Handschuhe (und 20 Socken), also ein richtiges Paar Handschuhe, oder mindestens 15 Socken (und 12 Handschuhe), also mehrere richtige Paare.

## Aufgabe 10 – Käferwanderung (10 Punkte)

Sei $\overline{DC} = x$. Dann ist $\overline{CE} = x \cdot \cos 60° = \frac{x}{2} \Rightarrow \overline{AE} = 12 - \frac{x}{2}$.

Ebenso gilt $\overline{BF} = 12 - \frac{\overline{AE}}{2} = 12 - \frac{12 - \frac{x}{2}}{2}$.

Aus $\overline{BD} = \frac{\overline{BF}}{2} = 12 - x$ folgt $\overline{BF} = 24 - 2x$ und daraus $x = 8$.




Hier ein weiterer Lösungsweg:
Die Dreiecke DCE, EAF und BDF sind rechtwinklig. Die beiden anderen Winkel sind 60° und 30° weit. Die Innenwinkel des Dreiecks DEF sind deshalb jeweils 60° weit. Also ist das Dreieck DEF gleichseitig und die drei äußeren Dreiecke sind damit kongruent. Die Dreiecke BDF und DCE lassen sich zu einem gleichseitigen Dreieck mit der Seitenlänge $\overline{DC} = 2\overline{BD}$ zusammensetzen. Mit $\overline{BC} = 12$ erhält man $\overline{BD} = 4$ und $\overline{DC} = 8$.

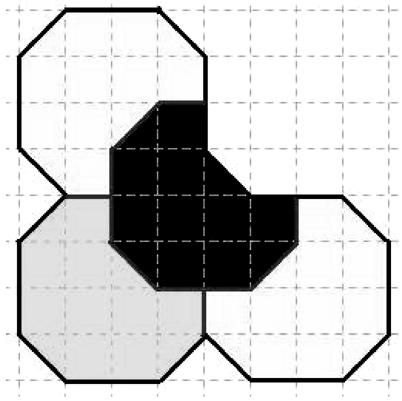
# Mathematik ohne Grenzen 4. März 2010 Lösungsvorschläge

## Aufgabe 1 – Mathemagisch (7 Punkte)

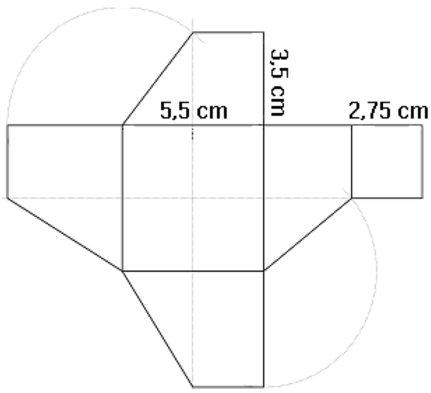
Der Magier muss den Spielstein umdrehen, den er mit den Augen verfolgt hat.

- Wenn dieser Spielstein die gleiche Farbe hat wie der Spielstein, der anfangs in der Mitte lag, dann wurde er nicht vertauscht. Dieser Stein wurde vom Zuschauer ausgewählt.
- Wenn dieser Spielstein eine andere Farbe hat, dann wurde er mit dem mittleren vertauscht. Der Zuschauer hat also weder diesen noch den Stein der anfangs in der Mitte lag ausgewählt. Also bleibt nur noch der dritte Stein übrig.

## Aufgabe 2 – Jeder an seinem Platz (5 Punkte)



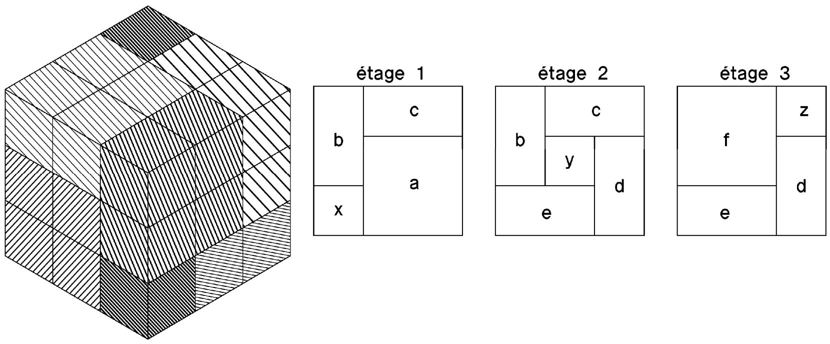
## Aufgabe 3 – Eckstein (7Punkte)



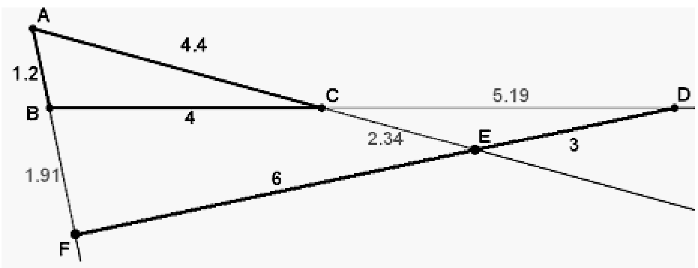

Der pyramidenförmige Schlussstein ist eine Verkleinerung der großen Pyramide im Maßstab 1:200. Die Grundfläche dieser Pyramide hat demnach die Kantenlänge 110 cm. Da alle Schichten gleich hoch sind, hat die Grundfläche der darunter liegenden Etage die doppelte Kantenlänge, also 220 cm. Diese Etage besteht dann aus vier aneinander liegenden Ecksteinen mit einer Grundfläche von 110 cm Kantenlänge. Damit stehen aber auch die Abmessungen der Deckfläche eines Ecksteins fest. Die Kantenlänge beträgt 55 cm. Zusammen mit der Höhe von 70 cm hat man alle Angaben um das Netz zeichnen zu können.

## Aufgabe 4 – 3D (5 Punkte)

Hier die Lösung und die Aufteilung in jeder Ebene. Die Anordnungen auf den 6 Seiten des Würfels sind bis auf Drehung oder Symmetrie gleich. Die kleinen Würfel x, y, z liegen auf einer Diagonalen.




## Aufgabe 5 – Auf Kurs (7 Punkte)




Zwischen 7:00 und 7:05 Uhr legt das Tankschiff 3 km zurück, in den 10 darauf folgenden Minuten 6 km. In der Zeichnung ergibt sich nebenstehende Anordnung der drei Objekte (Angaben in km). Die Strecke DF wird näherungsweise so eingepasst dass D, E und F auf der Verlängerung der Dreiecksseiten liegen. Im Maßstab 1:50 000 ist AB = 2,4 cm, BC = 8 cm, EF = 12 cm, AC = 8,8 cm DE = 6 cm und EF = 12 cm (siehe Seite 4 der Lösungen)

*Der exakte Verlauf von DF lässt sich trigonometrisch ermitteln (vgl. Angaben in der Zeichnung). Erwartet wird aber nur die zeichnerische Näherungslösung.*