Name:

Fach: PhaM
Klassen: 5E und 5S

Dauer der Prüfung: 240 Minuten
Hilfsmittel: Grafikrechner TI-83, Fundamentum, Geodreieck, Zirkel, Schreibzeug
Das Punktemaximum beträgt 76 Punkte. Den ungerundeten Sechser bekommt man mit 63 Punkten.

---

1. **Kryptologie:** (14P)

   (a) RSA-Verschlüsselung: (12P)
   Sie fangen eine RSA-verschlüsselte Botschaft ab. Der berechtigte Empfänger hat den öffentlichen Schlüssel n = 1 616 101 und e = 888 889. Ihnen fällt natürlich sofort auf, dass $1616101 = 16001 \cdot 100 + 16001$ ist. Zerlegen Sie n. Bestimmen Sie den privaten Schlüssel d des Empfängers. Entschlüsseln Sie die Botschaft: m = 1 551 040.
   Die ganze Rechnung, die trotz der großen Zahlen nur einige Zeilen benötigt, ist ohne Programm durchzuführen und in allen Schritten und Zwischenresultaten zu notieren. Das Programm darf zur Kontrolle benützt werden.

   (b) Cäsar-Verschlüsselung: (2P)

   QGC FYZCL XUCG NSLIRC

2. **Raumfahrt und Gravitation:** (11P)

Ein Satellit (m = 22.8 t) soll auf eine tiefe Erdumlaufbahn gebracht werden (LEO: Low Earth Orbit). Die Umlaufbahn soll kreisförmig sein.

(a) Von wo auf der Erde und in welche Richtung wird der Satellit am geeignetsten gestartet. Warum? (1P)

(b) Wie gross ist die Energie, die notwendig ist, um den Satelliten auf LEO (1200 km über dem Erdboden) zu bringen? Wie gross muss dort seine Geschwindigkeit sein, um nicht wieder auf die Erde zurück zu stürzen? Berechnen Sie seine Gesamtenergie. (3P)

Nun wird ein Hohmann-Transfer angewendet um den Satelliten auf eine geostationäre Umlaufbahn zu bringen.

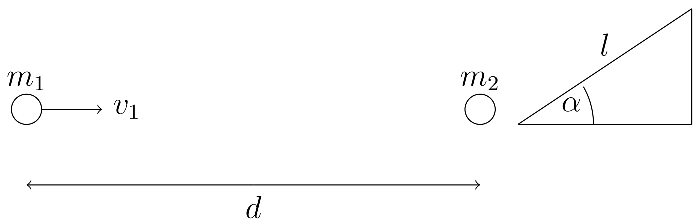
(c) Machen Sie eine saubere Skizze des Transfers zwischen LEO und der geostationären Umlaufbahn. (2P)

(d) Leiten Sie den Ausdruck für die Geschwindigkeitsänderung Δv_1 (Boost, um den Satelliten von der LEO-Bahn auf die Transferbahn zu bringen) her und berechnen Sie den Wert von Δv_1. (3.5P)

(e) Berechnen Sie die Geschwindigkeitsänderung Δv_2, um von der Transferbahn auf die geostationäre Bahn einzulenken. (1.5P)

3. **Erhaltungssätze:** (10P)

Pit-Pat ist ein Freizeitsport aus einer Kombination von Minigolf und Billard, auch Hindernis-Billard genannt. Bei der letzten Bahn geht es darum, mit Hilfe eines Queues (Spielstock beim Billard) und einer Kugel der Masse m_1, eine zweite Kugel der Masse m_2 einzulochen. Die zweite Kugel steht unmittelbar vor einer Rampe der Länge l = 1 m. Im Abstand von d = 2 m zur zweiten Kugel wird die erste Kugel angestossen. Die Rampe besitzt einen Neigungswinkel von $\alpha = 30°$ (siehe Skizze).



Nach Ihrem 1. Anstoss treffen Sie den Ball der Masse m_2 zentral. Nach dem Zusammenstoss der beiden Bälle rollt der Ball mit der Masse m_1 mit 20% der Anfangsgeschwindigkeit in Ihre Richtung zurück. Die Reibung und die Rotationsenergie können vernachlässigt werden und man kann davon ausgehen, dass es sich um einen vollkommen elastischen Stoss handelt.

(a) Erstellen Sie eine saubere Skizze vor und eine nach dem zentralen Stoss. Kennzeichnen Sie alle relevanten Grössen. (1P)

(b) Welche Geschwindigkeit (v_1 als allgemeiner Ausdruck) muss der Ball der Masse m_1 nach dem Anstoss haben, damit der Ball der Masse m_2 das Loch auf der Rampe erreicht? (5P)

(c) Berechnen Sie v_1 numerisch. **TIPP:** Benutzen Sie den Energiesatz, um ein Verhältnis von m_1 und m_2 zu finden. (4P)

4. **Schwerpunktberechnungen:** (17P)

   (a) Gegeben ist ein homogener Würfel mit der Kantenlänge 8. Der Würfel ist unterteilt in 64 identische Teilwürfel (siehe Abbildung 2), wobei die Teilwürfel 31, 42 und 56 fehlen. Berechnen Sie den Schwerpunkt S($x_S/y_S/z_S$) des Würfels. (14P)

   (b) Zeigen Sie, dass der Schwerpunkt einer homogenen Halbkugel mit Radius r genau $\frac{3}{8}$r über dem Mittelpunkt der Grundfläche in ihrem Innern liegt. (4P)

5. **Komplexe Zahlen:** (17P)

   (a) Lösen Sie die Gleichung $z^4 = 3 - 2i$ und geben Sie alle Lösungen in der Normalform an. (5.5P)

   (b) Gegeben ist die lineare Abbildung $f(z) = (2 + 3i)z + 3 + i$. (5P)

      i. Gegeben ist das Quadrat $A(1 + i)$, $B(2 + i)$, $C(2 + 2i)$ und D(1+2i).

         A. Zeichnen Sie das Quadrat in das gegebene Koordinatensystem (Abbildung 1).

         B. Berechnen Sie Bildpunkte A', B', C' und D' und zeichnen Sie diese auch in das Koordinatensystem.

         C. Berechnen Sie das Drehzentrum Z_0, den Streckungsfaktor k und den Drehwinkel α.

   (c) Gegeben ist die Gleichung $z^5 - 2z^4 - 10z^3 - 208z^2 + 949z - 1230 = 0$. $z_1 = 2 + i$ ist eine Lösung. Finden Sie alle Lösungen der Gleichung. (6.5P)

6. **Fotoeffekt:** (7P)

Der lichtelektrische Effekt wurde 1887 bereits von dem deutschen Physiker Hallwachs in einem einfachen Versuch erstmals entdeckt. Hallwachs lud ein Elektroskop einmal positiv und einmal negativ auf. Anschließend beleuchtete er jeweils das geladene Elektroskop mit einer Quecksilberdampflampe.

(a) Erklären Sie mit Ihrem Wissen zum Fotoeffekt, was Hallwachs in dem ersten Versuch beobachtet haben muss. (2P)

In einem zweiten Versuch beleuchtete er ein anfänglich ungeladenes Elektroskop mit UV-Licht ($\lambda = 250$ nm) und mass mit einem Spannungsmessgerät die Spannung zwischen Elektroskop und Erde. Diese war anfänglich null und stieg mit der Zeit auf einen bestimmten Wert U an.

(b) Ermittlen Sie durch Rechnung den Wert U, der hier in dem Versuch gemessen wurde. Um Elektronen auslösen zu können, muss an der Metallplatte des Elektroskop eine Arbeit von 2.50 eV geleistet werden. (2P)

(c) Die gleiche Lichtquelle beleuchtet 1.20 s die Kathode einer Fotozelle, deren Oberfläche 1.50 cm^2 beträgt. Die Intensität des Lichts am Ort der Kathode hat den Wert 2.00 $\frac{W}{m^2}$. Im Durchschnitt lösen $4.00 \cdot 10^7$ auf die Kathode einfallende Photonen ein Elektron aus der Kathode aus. Bestimmen Sie die Anzahl der ausgelösten Elektronen. (3P)

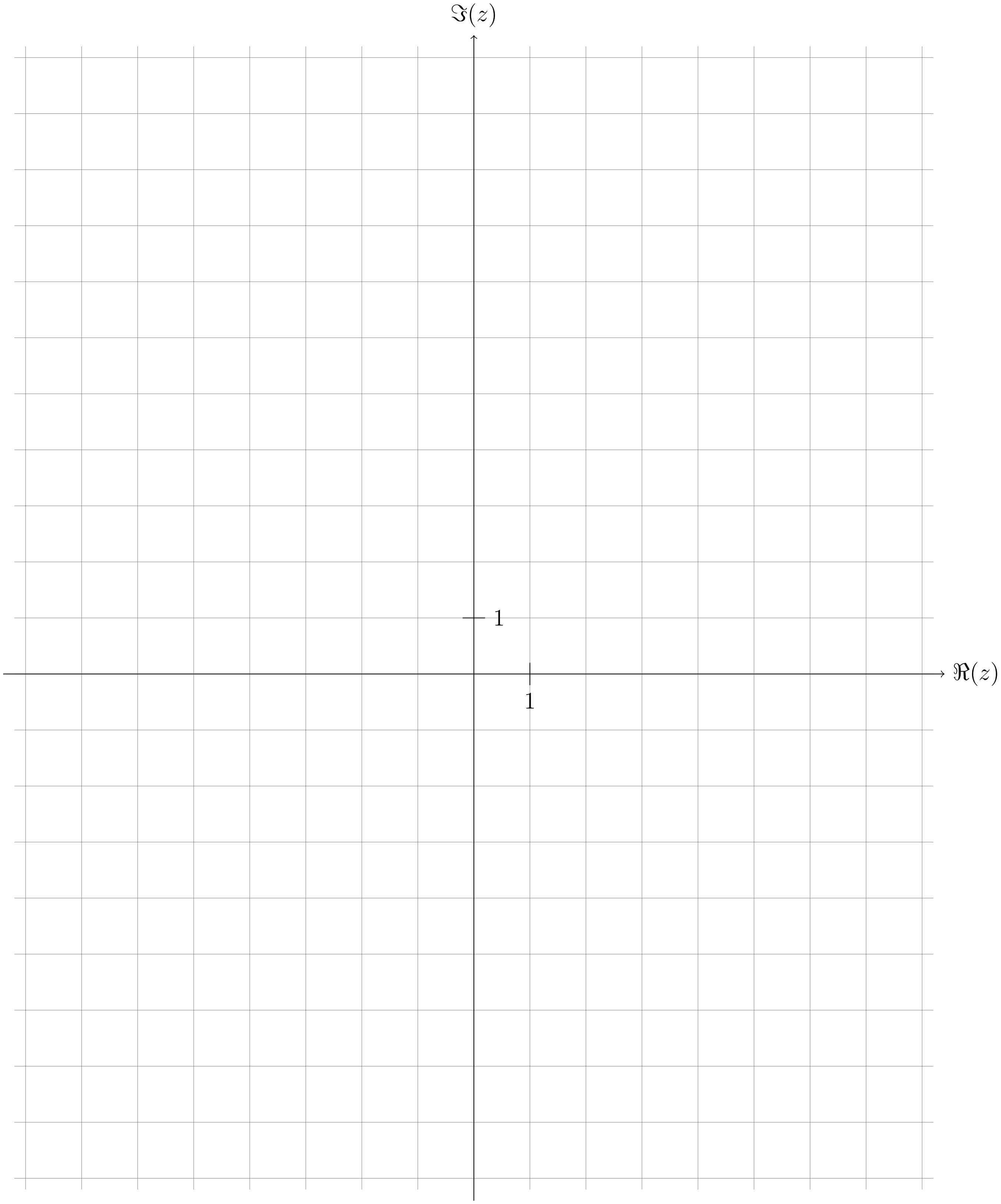


Abbildung 1: **Koordinatensystem zur Aufgabe 5**

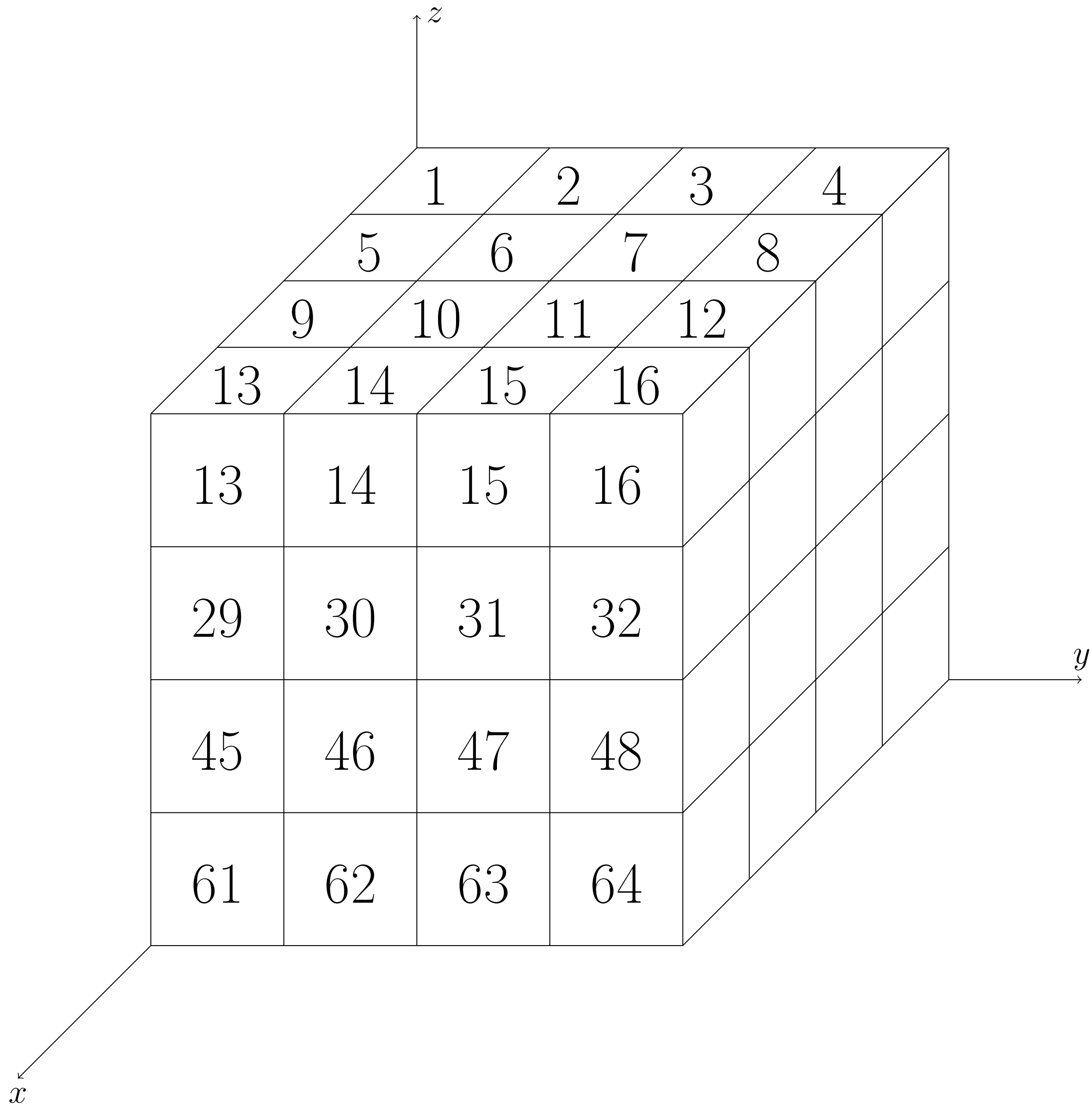


Abbildung 2: **Würfel zur Aufgabe 4**